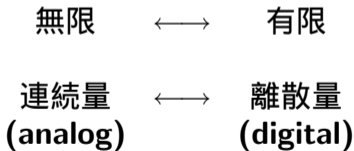


「極限」

良く判らないものを、

良く判るもので近似する。



等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

逆に見ると、

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)$$



関数を「多項式の極限」として表すこと
(冪級数・整級数)

一般に、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう。 “Taylor 展開”

係数 $a_n = ?$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

一般に、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう。“Taylor 展開”

係数 $a_n = ?$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

(形式的)Taylor 展開を計算してみよう!!

直接判る例

- 多項式関数: そのまま
(だけど面白い例もある)
- 高階微分 $f^{(n)}(x)$ が良く判る場合:
 $\sin x, \cos x, e^x$ など

(形式的)Taylor 展開を計算してみよう!!

直接判る例

- 多項式関数: そのまま
(だけど面白い例もある)
- 高階微分 $f^{(n)}(x)$ が良く判る場合:
 $\sin x, \cos x, e^x$ など

二項定理

$$\begin{aligned}(1+x)^N &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n \\ &= 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2}x^2 + \cdots + x^N\end{aligned}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = {}_N C_n$$

: 二項係数 (**binomial coefficient**)

指数関数・三角関数

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\end{aligned}$$

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合:

- 既知の公式から (等比級数の和など)
- 既知の展開に代入
- 既知の展開から四則演算で
- 既知の展開から項別微積分で

問題:

(1) $f(x) = \sin x$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ を求めよ。

(b) $\sin 1$ の近似値を
小数第 4 位まで求めよ。

前回の演習の答案へのコメント:

- 読める答案を書く
 - ★ 読める字で書く
 - ★ 読みとれる論理で書く
 - * 「...とする」のか
 - 「...となる」のか
 - * 必要条件か十分条件か
 - * 等式・不等式の根拠は何か
- 技術的なコメント

Taylor 展開の利点 (何が良いか):

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

Taylor 展開の欠点:

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
やってもよいか？