「極限」

良く判らないものを、

良く判るもので近似する。

無限	$\longleftrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longleftrightarrow$	**離散量** **(digital)**

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

(冪級数・整級数)

一般に、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と表すことを考えよう。“Taylor 展開”

係数 $a_n =$ **?**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

(形式的)Taylor 展開を計算してみよう!!

直接判る例

- **多項式関数: そのまま (だけど面白い例もある)**

- **高階微分** $f^{(n)}(x)$ **が良く判る場合:** $\sin x, \cos x, e^x$ **など**

二項定理

$$(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n$$

$$= 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2} x^2 + \cdots + x^N$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = {}_N C_n$$

: **二項係数 (binomial coefficient)**

指数関数・三角関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots$$

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合:

- **既知の公式から (等比級数の和など)**
- **既知の展開に代入**
- **既知の展開から四則演算で**
- **既知の展開から項別微積分で**

問題:

(1) $f(x) = \sin x$ **の Taylor 展開を求めよ。**

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ **を求めよ。**

(b) $\sin 1$ **の近似値を**
小数第 4 **位まで求めよ。**

前回の演習の答案へのコメント:

- **読める答案を書く**

  ⋆ **読める字で書く**

  ⋆ **読みとれる論理で書く**
  - ∗ **「…とする」のか**
    「…となる」のか
  - ∗ **必要条件か十分条件か**
  - ∗ **等式・不等式の根拠は何か**

- **技術的なコメント**

Taylor 展開の利点 (何が良いか):

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
  - $\star$ 近似値の計算
  - $\star$ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

Taylor 展開の欠点:

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) をやってよいか？