

(形式的) Taylor 展開:

$$f(x) \text{ “=” } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

二項展開 (a は任意の実数で可):

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\ &= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

: 二項係数 (**binomial coefficient**)

無限等比級数の和:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\text{収束} \iff |rx| < 1$$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

無限等比級数の和:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\text{収束} \iff |rx| < 1$$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

指数関数・対数関数

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

三角関数

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\end{aligned}$$

問題:

(1) $f(x) = \sin x$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ を求めよ。

(b) $\sin 1$ の近似値を
小数第 4 位まで求めよ。

Taylor 展開の利点 (何が良いか):

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る
(かも)

Taylor 展開の欠点:

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) をやってよいか？

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

例 (調和級数):

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

⇓

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots??$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots??$$

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

は収束するが、

$$T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots < 1$$

より

$$\frac{1}{2} < T < 1 \quad (\text{実は } T = \log 2 \doteq 0.693)$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \dots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \\ + \dots < \frac{4}{3}$$

$$1 < T < \frac{4}{3}$$

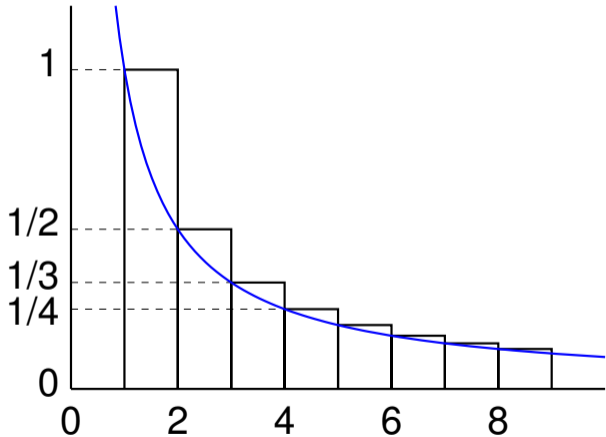
$$\text{(実は } T = \frac{3}{2} \log 2 \doteq 1.040)$$

このような 奇怪 な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

が発散することにある。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \quad !!$$



実数列 (a_n) に対し、

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max\{a_n, 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\} \end{aligned}$$

とおく。

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$(a_n^1)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right)$$