(形式的)Taylor 展開:

$$f(x) \text{ “}=\text{” } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

二項展開 (a は任意の実数で可):

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$
$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

: 二項係数 (binomial coefficient)

無限等比級数の和:

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n$$
$$= 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \cdots$$

収束 $\iff |rx| < 1$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

指数関数・対数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

三角関数

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots
\end{aligned}
$$

問題:

(1) $f(x) = \sin x$ **の Taylor 展開を求めよ。**

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ **を求めよ。**

(b) $\sin 1$ **の近似値を小数第** 4 **位まで求めよ。**

Taylor 展開の利点 (何が良いか):

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
  - $\star$ 近似値の計算
  - $\star$ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

Taylor 展開の欠点:

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) をやってよいか？

- **無限級数の収束・発散の判定**

- **特に、冪級数の場合**

- **“Taylor の定理” (誤差項の評価)**

- **項別微積分**

例 (調和級数):

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
S = & 1 & +\dfrac{1}{2} & +\dfrac{1}{3} & +\dfrac{1}{4} & +\dfrac{1}{5} & +\dfrac{1}{6} & +\dfrac{1}{7} & +\dfrac{1}{8} & +\cdots \\[2ex]
-\dfrac{1}{2}S = & & -\dfrac{1}{2} & & -\dfrac{1}{4} & & -\dfrac{1}{6} & & -\dfrac{1}{8} & +\cdots \\[1ex]
\hline
\dfrac{1}{2}S = & 1 & & +\dfrac{1}{3} & & +\dfrac{1}{5} & & +\dfrac{1}{7} & & +\cdots
\end{array}
$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots ??$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}S = \quad -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{6} \qquad -\frac{1}{8} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}S = \quad -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{6} \qquad -\frac{1}{8} + \cdots$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots ??$$

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

は収束するが、

$$T = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \cdots < 1$$

より

$$\frac{1}{2} < T < 1 \qquad \textbf{(実は } T = \log 2 \fallingdotseq 0.693\textbf{)}$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}) + \cdots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) + \cdots < \frac{4}{3}$$

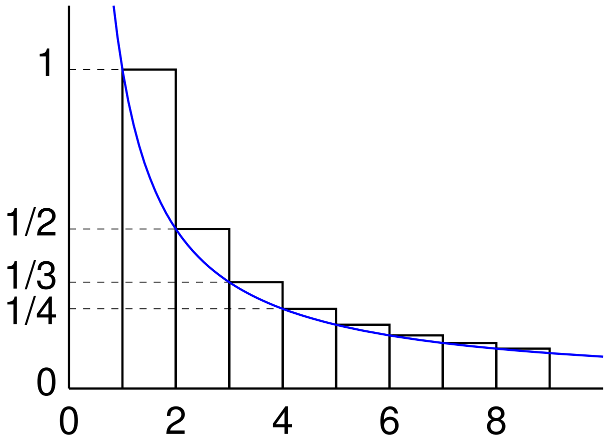
$$1 < T < \frac{4}{3}$$ **(実は** $T = \frac{3}{2}\log 2 \fallingdotseq 1.040$**)**

このような <u>奇怪</u> な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

が発散することにある。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty \quad \textbf{!!}$$


1
1/2
1/3
1/4
0
0
2
4
6
8

実数列 (a_n) **に対し、**

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max\{a_n, 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\} \end{aligned}$$

とおく。

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = (1, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \ldots)$$

$$(a_n^1)_{n=1}^{\infty} = (0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \ldots)$$