

Taylor 展開の利点 (何が良いか):

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る
(かも)

Taylor 展開の欠点:

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) をやってよいか？

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

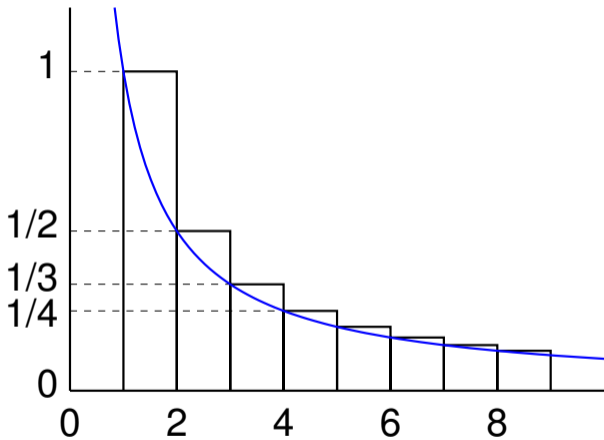
例 (調和級数):

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

は 発散する。



$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

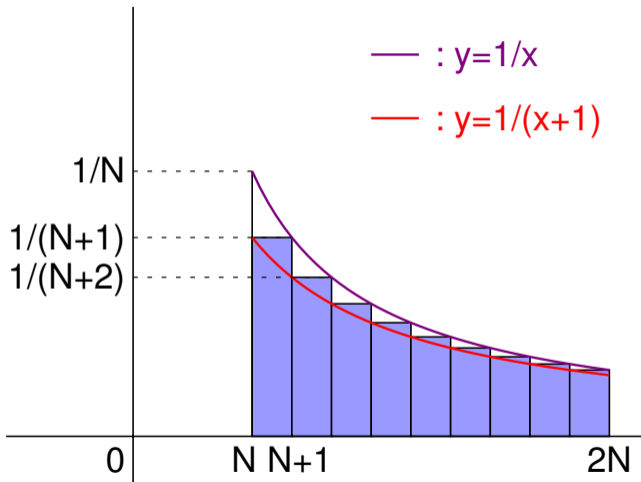
は収束する。

$$T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots < 1$$

より

$$\frac{1}{2} < T < 1 \quad (\text{実は } T = \log 2 \doteq 0.693)$$



実数列 (a_n) に対し、

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max\{a_n, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\} \end{aligned}$$

とおく。

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

$$\sum |a_n| : \text{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束}$$
$$\implies \sum a_n : \text{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$$\sum |a_n| : \text{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束}$$
$$\implies \sum a_n : \text{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$: 共に収束
(即ち、 $\sum |a_n|$: 収束) の時、

「絶対収束 (absolutely convergent)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ... 正項級数の収束判定

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$: 共に収束しない
(即ち、 $\sum |a_n|$: 収束しない) が、
 $\sum a_n$ は収束する時、

「条件収束 (conditionally convergent)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る。

正項級数の収束判定

$$\begin{aligned} \text{部分和: } S_N &= \sum_{n=0}^N a_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \end{aligned}$$

正項級数 ($a_n > 0$)

\iff 部分和 S_N が単調増加

\longrightarrow 単調増加数列の収束判定へ

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する」とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する」とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する」とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する」とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

「 $\forall M : \exists n : s_n > M$ 」となったら発散

収束する為には

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

でなければならぬ。

M : 数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ の**上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を**上に有界**という。

定理:

- 単調増加数列が収束 \iff 上に有界
- 正項級数が収束 \iff 部分和が有界

即ち、 $\forall n : a_n \geq 0$ の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

しかも、

- 極限值は**最小上界 (上限)**
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限值は最小上界 (上限):

$$M_0 := \min \left\{ M \mid \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M \right\}$$
$$\left(= \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N = 0, 1, 2, \dots \right\} \right)$$

とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = M_0.$$

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 \implies $\sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 \implies $\sum b_n$: 発散

• 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

• 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\implies \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\implies \sum b_n$: 発散

• 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

• 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$a_n \leq b_n$ のとき

- $(b_n)_{n=0}^{\infty}$: 収束 \implies $(a_n)_{n=0}^{\infty}$: 収束
- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$: 発散 \implies $(b_n)_{n=0}^{\infty}$: 発散

• 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

• 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$ でも可)

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |隣との比| < 1 くらいなら収束

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

$$a_n = r^n \text{ から}$$

“隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式: $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、
 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら
振舞は同様だろう。

$$a_n = r^n \text{ から}$$

“隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式: $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、
 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら
振舞は同様だろう。