Taylor 展開の利点 (何が良いか):

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
  - $\star$ 近似値の計算
  - $\star$ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

Taylor 展開の欠点:

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと):

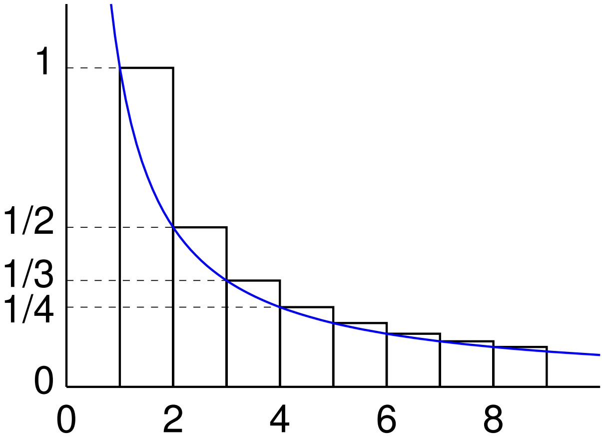
- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) をやってよいか？

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

例 (調和級数):

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

は <u>発散する</u>。


1
1/2
1/3
1/4
0
0
2
4
6
8

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

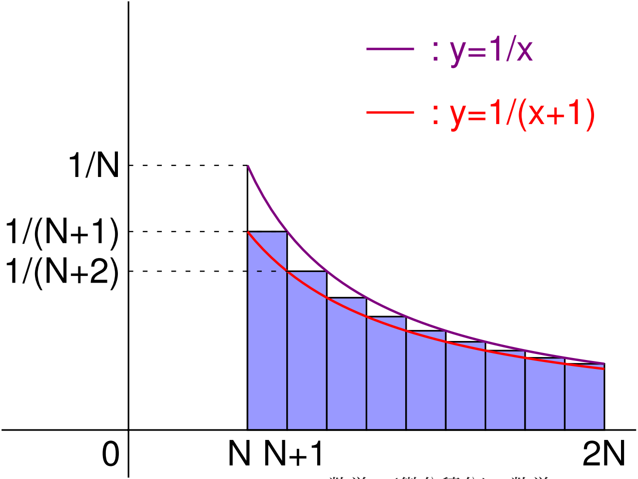
は収束する。

$$T = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \cdots < 1$$

より

$$\frac{1}{2} < T < 1$$ **(実は** $T = \log 2 \fallingdotseq 0.693$**)**


: y=1/x
: y=1/(x+1)
1/N
1/(N+1)
1/(N+2)
0
N N+1
2N

実数列 (a_n) に対し、

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}$$
$$= \max\{a_n, 0\}$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$
$$= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}$$

とおく。

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = (1, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \ldots)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = (0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \ldots)$$

$$\sum |a_n| : \textbf{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \textbf{共に収束}$$

$$\implies \sum a_n : \textbf{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$ ： 共に収束
(即ち、$\sum |a_n|$ ： 収束) の時、

「**絶対収束 (absolutely convergent)**」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 … 正項級数の収束判定

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$ ： 共に収束しない
(即ち、$\sum |a_n|$ ： 収束しない) が、
$\sum a_n$ は収束する時、

「**条件収束 (conditionally convergent)**」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る。

正項級数の収束判定

部分和: $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$**)**

$\iff$ **部分和** S_N **が単調増加**

$\longrightarrow$ **単調増加数列の収束判定へ**

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が 正の無限大に発散する」とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

「$\forall M : \exists n : s_n > M$」となったら発散

収束する為には

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

でなければならぬ。

M **： 数列** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **の上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を上に有界という。

定理:

- **単調増加数列が収束 $\iff$ 上に有界**
- **正項級数が収束 $\iff$ 部分和が有界**

即ち、 $\forall n : a_n \geq 0$ **の時、**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \textbf{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$$

しかも、

- **極限値は最小上界 (上限)**
- **順番を入替えても同じ値に収束**

極限値は最小上界 (上限):

$$M_0 := \min\left\{ M \,\middle|\, \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M \right\}$$
$$\left(= \sup\left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \,\middle|\, N = 0, 1, 2, \ldots \right\}\right)$$

とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = M_0.$$

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$a_n \leq b_n$ **のとき**

- $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ **: 収束** $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **: 収束**
- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **: 発散** $\Longrightarrow$ $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ **: 発散**

  - **途中からでも良い**
    ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可)**
  - **定数倍しても良い**
    ($\exists C > 0 : a_n \leq C b_n$ **でも可)**

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**“隣との比”**$| < 1$ **くらいなら収束**

$a_n = r^n$ **から**

"隣との比" r を取り出すには？

- **漸化式:** $a_{n+1} = r a_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列 (a_n) に対しても、**

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**

振舞は同様だろう。