中間試験のお知らせ:

6月16日(月) 13:30 〜 15:00

3-448教室 (ここ) の予定

- **Taylor展開を巡る諸々**
  (前の週 (6/9) の講義内容まで)

- **学生証必携**

詳細は追って

定理:

- **単調増加数列が収束** $\iff$ **上に有界**
- **正項級数が収束** $\iff$ **部分和が有界**

即ち、$\forall n : a_n \geq 0$ **の時、**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \textbf{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$$

しかも、

- **極限値は最小上界 (上限)**
- **順番を入替えても同じ値に収束**

極限値は最小上界 (上限):

$$M_0 := \min \left\{ M \middle| \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M \right\}$$

$$\left(= \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \middle| N = 0, 1, 2, \ldots \right\} \right)$$

とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = M_0.$$

比較判定法：良く判っている級数と比較

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow \sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow \sum b_n$ **：発散**

- **途中からでも良い**
  ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可)**
- **定数倍しても良い**
  ($\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$ **でも可)**

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**“隣との比”**$| < 1$ **くらいなら収束**

$a_n = r^n$ **から**

"隣との比" r を取り出すには？

- **漸化式** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** (a_n) **に対しても、**

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**

振舞は同様だろう。

d'Alembert の判定法 (比テスト):

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \exists r < 1 \Longrightarrow \sum a_n : \textbf{収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\textbf{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト):

$$\boxed{\sqrt[n]{a_n} \leq \exists r < 1 \Longrightarrow \sum a_n : \textbf{収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\textbf{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

演習問題:

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$$

d'Alembert の判定法 (比テスト):

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r$ (**収束**) **のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト):

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r$ (**収束**) **のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

で、$r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)。

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない !!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ **：発散** **だが、** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ **：収束**

実は、 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow s > 1$ **で** s **の関数を定めている。**

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ **：発散**　　**だが、**　　$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ **：収束**

実は、 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow s > 1$ **で** s **の関数を定めている。**

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ **：発散　だが、** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ **：収束**

実は、 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow s > 1$ **で** s **の関数を定めている。**

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

: Riemann のゼータ関数

"Millenium Prize" の 7 つの問題の
1 つは、この $\zeta(s)$ の性質に関すること
(Riemann 予想)

$\longrightarrow$ **素数分布などと関連**

Euler (18 世紀)：

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2m) = (\textbf{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

- $\zeta(3)$: **有理数でない (Apéry, 1978)**

- $\zeta(2m+1)$ **達の中に無理数が無限個 (Rivoal, 2000)**

$\longrightarrow$ **これらの値 (特殊値) の数論的性質は、**

現在でも大きな研究テーマ

本題に戻ろう

冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

が収束する x の範囲は？

比テスト:

$\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s$ (**収束**) **のとき、**

- $|x| < s^{-1} \implies$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \implies$ **発散**

n 乗根テスト:

$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s$ (**収束**) **のとき、**

- $|x| < s^{-1} \implies$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \implies$ **発散**

s^{-1} **: 収束半径**

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
  $\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束

$$r := \sup \left\{ |x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

とおくと、

- $|x| < r \Longrightarrow$ 絶対収束
- $|x| > r \Longrightarrow$ 発散

この r を**収束半径**と呼ぶ。

- 全ての実数 x に対し収束 $\cdots\ r = \infty$
- $x = 0$ でしか収束しない $\cdots\ r = 0$

Taylor 展開の問題点

(考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？

- 収束したら元の関数と一致するか？

- 誤差の理論的評価は？

- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
  行なってよいか？

$\longrightarrow$ “Taylor の定理”

Taylor 展開の問題点

(考えなくてはならないこと):

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？**

$\longrightarrow$ **“Taylor の定理”**

形式的 Taylor 展開

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

で、右辺の和が収束する時、

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)
$$

であるか？

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \longrightarrow 0$$

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$: **剰余項**

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \longrightarrow 0$$

$$R_N(f;x) := f(x)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$: **剰余項**

形式的 Taylor 展開が収束して、
元の関数 $f(x)$ と一致:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$R_N(f; x) \longrightarrow 0$$

$\longrightarrow$ **剰余項 $R_N(f; x)$ の評価が問題**

Taylor の定理:

f: N **回微分可能** ($N \geq 1$)

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$