

中間試験のお知らせ:

6月16日(月) 13:30 ~ 15:00

3-448 教室 (ここ) の予定

- Taylor 展開を巡る諸々  
(前の週 (6/9) の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

## 定理:

- 単調増加数列が収束  $\iff$  上に有界
- 正項級数が収束  $\iff$  部分和が有界

即ち、 $\forall n : a_n \geq 0$  の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

しかも、

- 極限值は最小上界 (上限)
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限值は最小上界 (上限):

$$M_0 := \min \left\{ M \mid \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M \right\}$$
$$\left( = \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N = 0, 1, 2, \dots \right\} \right)$$

とするととき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = M_0.$$

## 比較判定法：良く判っている級数と比較

正項級数  $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

$a_n \leq b_n$  のとき

- $\sum b_n$  : 収束  $\implies$   $\sum a_n$  : 収束
- $\sum a_n$  : 発散  $\implies$   $\sum b_n$  : 発散

• 途中からでも良い

( $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$  でも可)

• 定数倍しても良い

( $\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$  でも可)

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数  $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$  のとき収束し、その和は  $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$  のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

$$a_n = r^n \text{ から}$$

“隣との比”  $r$  を取り出すには？

- 漸化式  $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項  $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列  $(a_n)$  に対しても、  
 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  や  $\sqrt[n]{a_n}$  が大体  $r$  くらいなら  
振舞は同様だろう。

## d'Alembert の判定法 (比テスト):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \exists r < 1 \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

## Cauchy の判定法 ( $n$ 乗根テスト):

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \exists r < 1 \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散



## 演習問題:

次の級数が絶対収束するような  $x$  の範囲は？

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

## d'Alembert の判定法 (比テスト):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

## Cauchy の判定法 ( $n$ 乗根テスト):

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

で、 $r = 1$  の時は判定不能 (両方有り得る)。

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない !!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

$$\text{実は、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→  $s > 1$  で  $s$  の関数を定めている。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

**: Riemann のゼータ関数**

**“Millenium Prize” の 7 つの問題の  
1 つは、この  $\zeta(s)$  の性質に関すること  
(Riemann 予想)**

→ 素数分布などに関連

**Euler (18 世紀) :**

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

⋮

$$\zeta(2m) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m}$$
$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

- $\zeta(3)$  : 有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m + 1)$  達の中に無理数が無限個 (Rivoal, 2000)

→ これらの値 (特殊値) の数論的性質は、

現在でも大きな研究テーマ

本題に戻ろう



## 冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

が収束する  $x$  の範囲は？

比テスト:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$  収束
- $|x| > s^{-1} \implies$  発散

$n$  乗根テスト:

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$  収束
- $|x| > s^{-1} \implies$  発散

$s^{-1}$  : 収束半径

- $\sum c_n x^n$  が  $x = x_0$  で収束  
 $\implies |x| < |x_0|$  で絶対収束

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

とおくと、

- $|x| < r \implies$  絶対収束
- $|x| > r \implies$  発散

この  $r$  を収束半径と呼ぶ。

- 全ての実数  $x$  に対し収束  $\dots r = \infty$
- $x = 0$  でしか収束しない  $\dots r = 0$

## Taylor 展開の問題点

(考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を  
行なってよいか？

→ “Taylor の定理”

## 形式的 Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$

であるか？

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$



$$f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \longrightarrow 0$$

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n : \text{剰余項}$$

形式的 Taylor 展開が収束して、  
元の関数  $f(x)$  と一致:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



$$R_N(f; x) \longrightarrow 0$$

→ 剰余項  $R_N(f; x)$  の評価が問題

## Taylor の定理:

$f: N$  回微分可能 ( $N \geq 1$ )

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするととき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$