

Taylor 展開の問題点

(考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
行なってよいか？

形式的 Taylor 展開が収束しても、
元の関数と一致しない例

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論 $x > 0$ では $f(x) \neq 0$

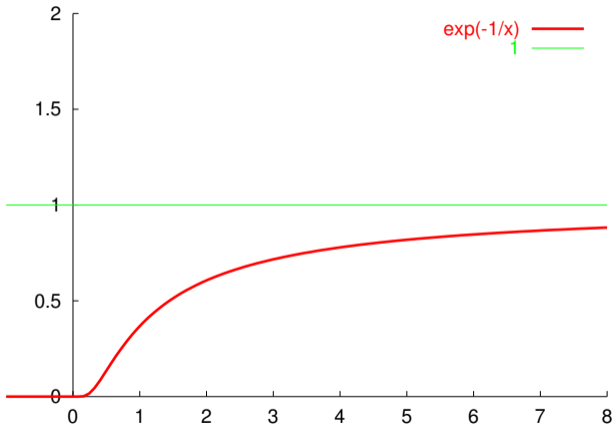
形式的 Taylor 展開が収束しても、
元の関数と一致しない例

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論 $x > 0$ では $f(x) \neq 0$

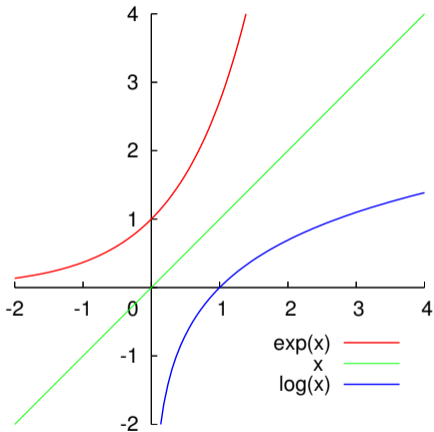


指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \iff x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$

$$\exp(\log x) = x$$



指数関数:

$y = \exp x$ は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数:

$y = \log x$ は積分表示

$$y = \int_{t=1}^x \frac{dt}{t}$$

を持つ。

→ 実はこれは表裏一体

指数関数:

$y = \exp x$ は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数:

$y = \log x$ は積分表示

$$y = \int_{t=1}^x \frac{dt}{t}$$

を持つ。

→ 実はこれは表裏一体

三角関数 $y = \sin x$ で同様に考えよう。

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

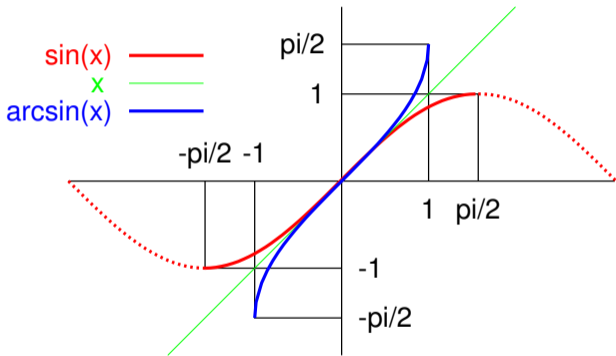
なので、次の微分方程式を満たす。

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

通常 $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ と書いてしまうが、

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$ のとき、

$\arcsin 0 = 0$ (即ち $\sin 0 = 0$) だから、

積分の下端は 0 で良い。

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_{t=0}^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \\ &\quad (|x| < 1)\end{aligned}$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

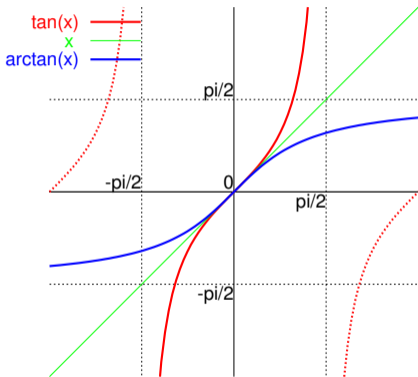
- 定義域: $-1 \leq x \leq 1$
- 値域: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ (主値)
- 積分表示: $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

演習問題:

\arcsin の時の真似をして、次の手順で
 $y = \arctan x$ の Taylor 展開を求めよ。

- (1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める。
- (2) $\arctan x$ を積分で表す。
- (3) 被積分関数を Taylor 展開し項別積分する。

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- 定義域: 全実数 x
- 値域: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ (主値)
- 積分表示: $\arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$