Taylor 展開の問題点
(考えなくてはならないこと):

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？

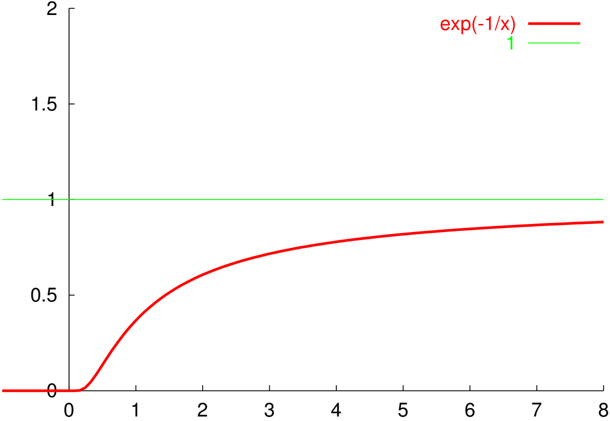
形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、$f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

従って、形式的 Taylor 展開は 0

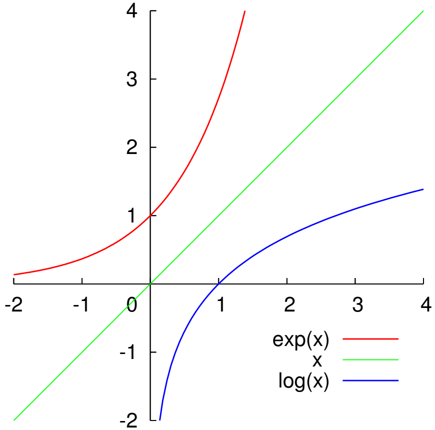
しかし勿論 $x > 0$ では $f(x) \neq 0$


exp(-1/x)
1
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \iff x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$
$$\exp(\log x) = x$$


4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
exp(x)
x
log(x)

指数関数:

$y = \exp x$ **は微分方程式**

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数:

$y = \log x$ **は積分表示**

$$y = \int_{t=1}^{x} \frac{dt}{t}$$

を持つ。

$\longrightarrow$ **実はこれは表裏一体**

三角関数 $y=\sin x$ で同様に考えよう。

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$

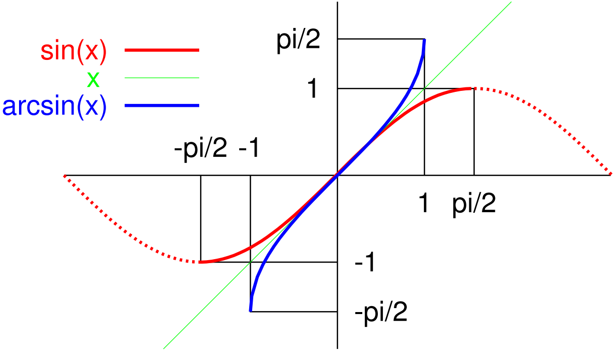
なので、次の微分方程式を満たす。

$$y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

通常 $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **と書いてしまうが、**

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$ **のとき、**

$\arcsin 0 = 0$ **(即ち** $\sin 0 = 0$**) だから、**

積分の下端は 0 **で良い。**

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \ dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

$$(|x| < 1)$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- **定義域:** $-1 \leq x \leq 1$
- **値域:** $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ **(主値)**
- **積分表示:** $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

演習問題:

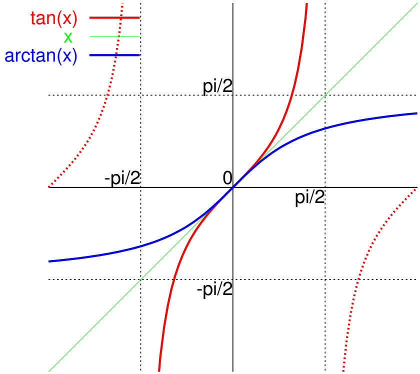
$\arcsin$ の時の真似をして、次の手順で
$y = \arctan x$ の Taylor 展開を求めよ。

(1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める。

(2) $\arctan x$ を積分で表す。

(3) 被積分関数を Taylor 展開し項別積分する。

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- **定義域: 全実数** x
- **値域:** $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ **(主値)**
- **積分表示:** $\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$