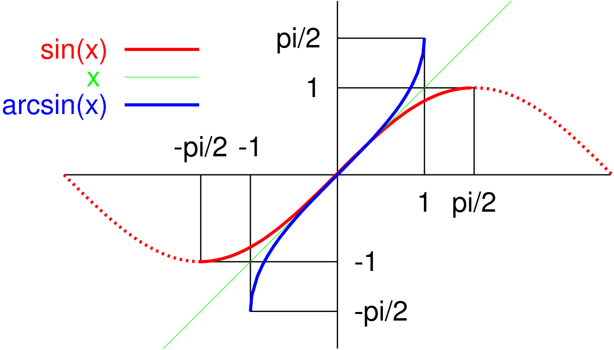
$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- **定義域:** $-1 \leq x \leq 1$
- **値域:** $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ **(主値)**
- **積分表示:** $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

演習問題:

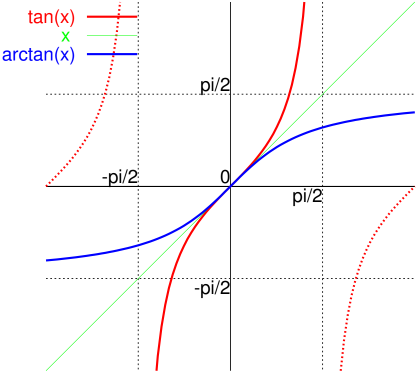
$\arcsin$ の時の真似をして、次の手順で
$y = \arctan x$ の Taylor 展開を求めよ。

(1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める。

(2) $\arctan x$ を積分で表す。

(3) 被積分関数を Taylor 展開し項別積分する。

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- **定義域: 全実数** x
- **値域:** $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ **(主値)**
- **積分表示:** $\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、
別に不思議はないが、

$\arctan x$ は全実数に対して定義できて、
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、
別に不思議はないが、

$\arctan x$ は全実数に対して定義できて、
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

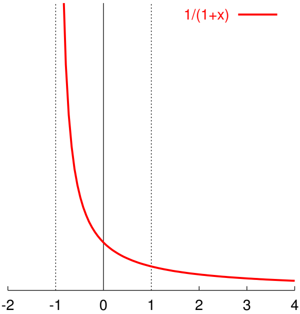
ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ **は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、**
別に不思議はないが、

$\arctan x$ **は全実数に対して定義できて、**
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **にも別に変な所はない。**

例: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$



$x = -1$ **で分母が** $0 \longrightarrow$ **元々そこまで**

複素数まで拡げて考えると、

$\arctan x$ **の正体が顕れる!!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり

$|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった。**

($| \pm i| = 1$**)**

複素数まで拡げて考えると、

$\arctan x$ **の正体が顕れる!!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり

$|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった。**

($| \pm i| = 1$)

複素数まで拡げて考えると、

$\arctan x$ **の正体が顕れる!!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり

$|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった。**

($| \pm i| = 1$**)**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

**e^x の方は当面は意味不明だが、
右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので
意味を持つ。**

**x が複素数の場合も、
e^x を右辺の級数で定義してしまおう!!**

(詳しくは「複素関数論」で)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、
右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ。

x が複素数の場合も、
e^x を右辺の級数で定義してしまおう!!

(詳しくは「複素関数論」で)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、
右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので
意味を持つ。

x が複素数の場合も、
e^x を右辺の級数で定義してしまおう!!

(詳しくは「複素関数論」で)

試しに、

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\
&\qquad + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

Euler の公式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

試しに、

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\
&\qquad + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\textbf{Euler の公式:}\quad e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$
$$\Downarrow$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

これを使うと、

三角関数の諸性質は指数関数の性質に帰着。

加法定理 $\longleftarrow$ **指数法則**

双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

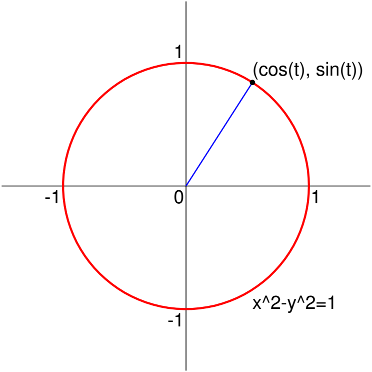
- 三角関数と類似の性質を持つ
- 自然現象の記述にも現われる

双曲線関数

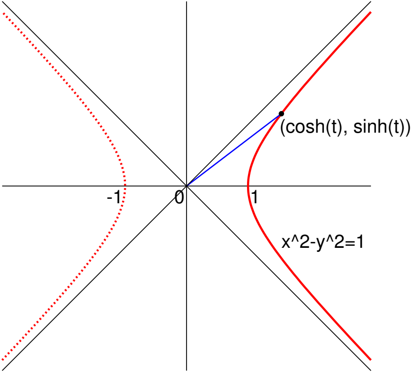
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **三角関数と類似の性質を持つ**
- **自然現象の記述にも現れる**

$x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cos t, \sin t)$



$x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cosh t, \sinh t)$



さて、話は変わって、

本講義後半の主題は、

積分

である。

さて、話は変わって、

本講義後半の主題は、

積分

である。

高校で習った積分:

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** F **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての「定積分」**
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **定積分は実は「面積」を表す**

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い。

- **「積分」: 面積を求める手法の探求 (エジプト・ギリシャ: 2000 年以上前)**
- **「微分」: 物体の運動の数学的探求 (Newton, Leibniz: 17 世紀)**

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた!!
$\cdots$ 「微分積分学の基本定理」

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い。

- **「積分」: 面積を求める手法の探求**
  (エジプト・ギリシャ: 2000 年以上前)

- **「微分」: 物体の運動の数学的探求**
  (Newton, Leibniz: 17 世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた!!
$\cdots$ **「微分積分学の基本定理」**

- **統一的な求積法としての「定積分」**

- **積分の上端を動かして、**
  積分値を上端の関数とみる

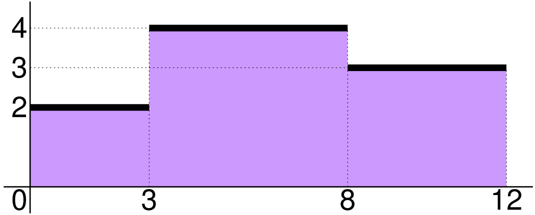
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ **:「定積分関数」**

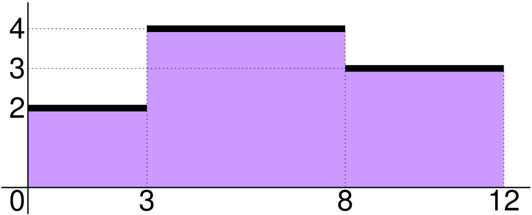
- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

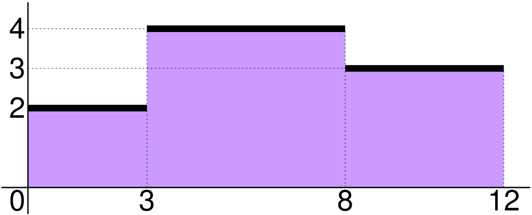
$$I = \int_0^{12} f(x)dx, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 3) \\ 4 & (3 \leq x < 8) \\ 3 & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$





$$I = \int_0^{12} f(x)dx$$
$$= 2 \times 3 + 4 \times 5 + 3 \times 4.$$

「積分」は「積和」である。



$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{12} f(x)dx \\
&= 2 \times 3 + 4 \times 5 + 3 \times 4.
\end{aligned}
$$

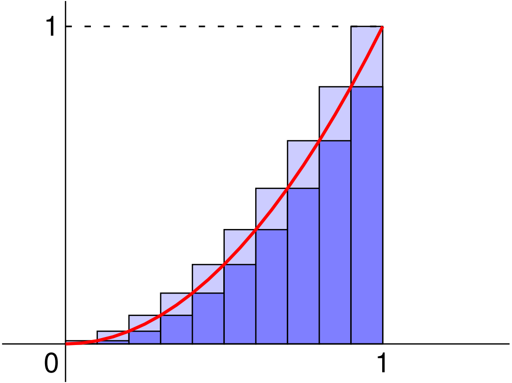
「積分」は「積和」である。

では、

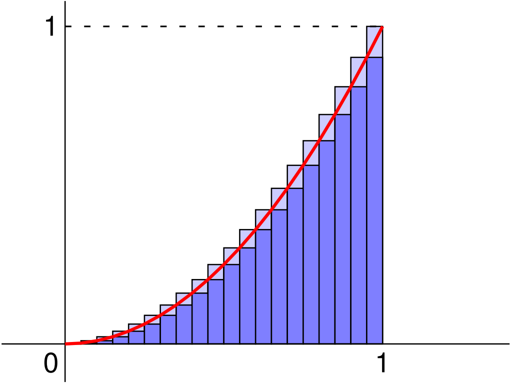
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

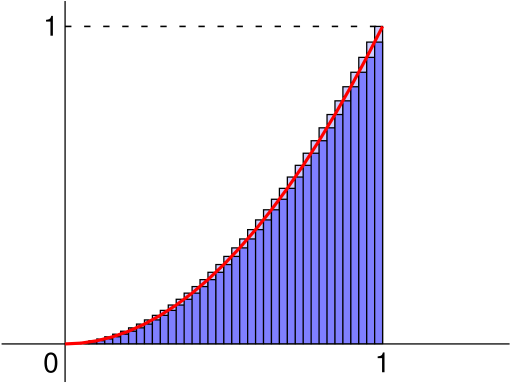
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



演習:

$f(x) = x^2$ **の** $[0, a]$ **での定積分**

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

を計算したい。分割

$$\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$$

を n **等分な分割 (即ち** $x_i = \dfrac{ia}{n}$**) とする。**

(1) 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ **での**
$f(x)$ **の下限** m_i **および上限** M_i **は?**

(2) $s_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ **及び**

$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ **を計算せよ。**

(3) **任意の** n **に対して** $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ **であることから、** $I = \int_0^a f(x)dx$ **を求めよ。**
($\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$ **が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)**

どんなに細かく切っても、
その小区間内で定数になる訳ではないが、
上下から見積もることは出来るだろう。

$$(\text{下からの見積}) \leq (\text{面積}) \leq (\text{上からの見積})$$

もしあれば

細かく切れば、
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、
これを「面積 (積分)」と呼んで良いだろう。

どんなに細かく切っても、
その小区間内で定数になる訳ではないが、
上下から見積もることは出来るだろう。

$$(\textbf{下からの見積}) \leq (\textbf{面積}) \leq (\textbf{上からの見積})$$

もしあれば

細かく切れば、
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、
これを「面積 (積分)」と呼んで良いだろう。

細かく切る方法は n 等分が簡単そうだが、
これだけを考えるのでは、話が旨く進まない。

例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

を示そうとすると $\cdots$

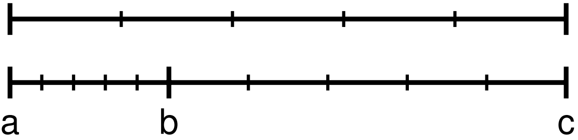
細かく切る方法は n 等分が簡単そうだが、
これだけを考えるのでは、話が旨く進まない。

例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

を示そうとすると $\cdots$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

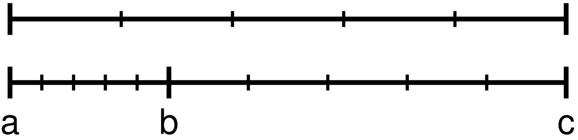


n **等分点が食い違って比較し難い。**

$\longrightarrow$ **予め**

「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ。

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



n **等分点が食い違って比較し難い。**

$\longrightarrow$ **予め**
「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ。