本講義後半の主題は、

積分

である。

高校で習った積分:

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** F **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての「定積分」**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **定積分は実は「面積」を表す**

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い。

- **「積分」: 面積を求める手法の探求**
  (エジプト・ギリシャ: 2000 年以上前)
- **「微分」: 物体の運動の数学的探求**
  (Newton, Leibniz: 17 世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた!!

$\cdots$ **「微分積分学の基本定理」**

- **統一的な求積法としての「定積分」**

- **積分の上端を動かして、積分値を上端の関数とみる**

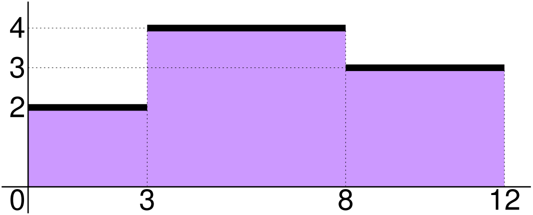
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ **：「定積分関数」**

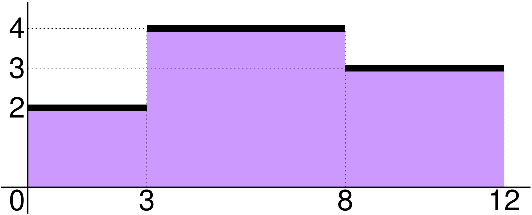
- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

$$I=\int_0^{12} f(x)dx, \qquad f(x)=\begin{cases} 2 & (0\le x<3) \\ 4 & (3\le x<8) \\ 3 & (8\le x\le 12) \end{cases}$$





$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{12} f(x)dx \\
&= 2 \times 3 + 4 \times 5 + 3 \times 4.
\end{aligned}
$$

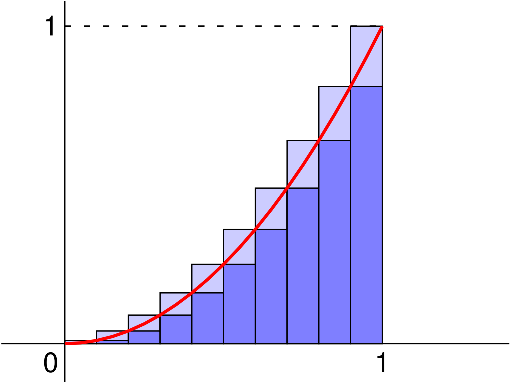
「積分」は「積和」である。

では、

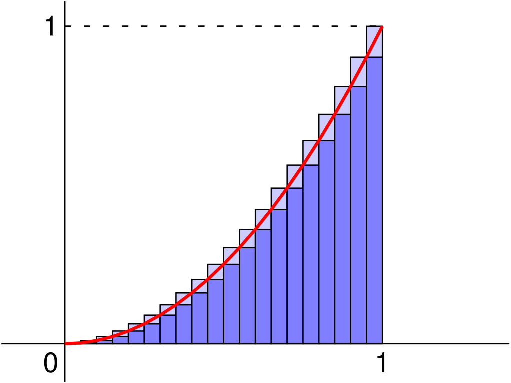
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

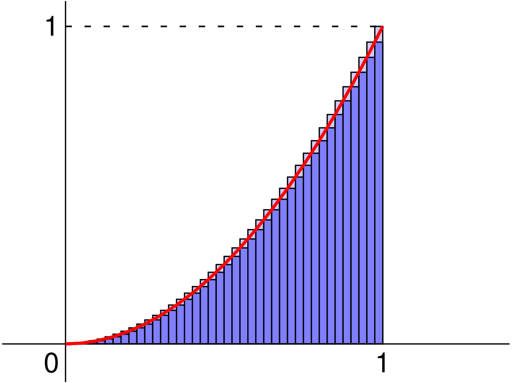
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



演習:

$f(x) = x^2$ **の** $[0, a]$ **での定積分**

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

を計算したい。分割

$$\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$$

を n **等分な分割 (即ち** $x_i = \dfrac{ia}{n}$**) とする。**

(1) 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ **での**
$f(x)$ **の下限** m_i **および上限** M_i **は？**

(2) $s_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ **及び**

$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ **を計算せよ。**

(3) **任意の** n **に対して** $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ **であることから、** $I = \int_0^a f(x)dx$ **を求めよ。**
($\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$ **が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)**

どんなに細かく切っても、
その小区間内で定数になる訳ではないが、
上下から見積もることは出来るだろう。

$$(\textbf{下からの見積}) \leq (\textbf{面積}) \leq (\textbf{上からの見積})$$

もしあれば

細かく切れば、
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、
これを「面積 (積分)」と呼んで良いだろう。

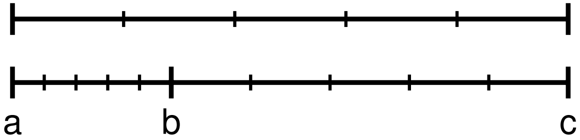
細かく切る方法は n 等分が簡単そうだが、
これだけを考えるのでは、話が旨く進まない。

例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

を示そうとすると $\cdots$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



n **等分点が食い違って比較し難い。**

$\longrightarrow$ **予め**
「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ。

余談 ··· 現代数学の手法の特徴 (の一つ):

「苦労を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦労をしておくと、
後で証明が楽になる。

人間の都合でなく、
数学のものたちの気持ちに、
我々の気持ちを合わせる。

その代わり、
人間には判り難くなることがあるけれど。

余談 $\cdots$ 現代数学の手法の特徴 (の一つ):

「苦労を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦労をしておくと、
後で証明が楽になる。

人間の都合でなく、
数学のものたちの気持ちに、
我々の気持ちを合わせる。

その代わり、
人間には判り難くなることがあるけれど。

余談 ··· 現代数学の手法の特徴 (の一つ):

「苦労を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦労をしておくと、
後で証明が楽になる。

人間の都合でなく、
数学のものたちの気持ちに、
我々の気持ちを合わせる。

その代わり、
人間には判り難くなることがあるけれど。

では、少々苦労はあるが、

「積分」の定義をきちんとしましょう。

仮定:

- **積分区間** $I = [a, b]$ **: <u>有界閉区間</u>**

- **被積分関数** f **:** I **で <u>有界</u>**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- **区間を分割せよ**
- **各区間で上下から見積もれ**
- **それを足し上げよ**
- **以上を全ての分割について考えよ**
- **上下からの見積が一致するか？**

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか ?

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

：区間の分割

$\delta(\Delta) = \max_i (x_i - x_{i-1})$ **：分割の最大幅**

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

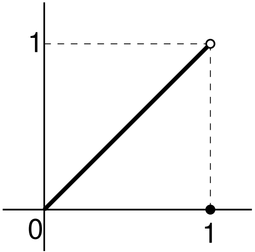
：各区間での下限・上限

上限・下限について (補足)

例: $I = [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

関数 $f(x)$ **(**$x \in I$**) に**
最大値はないが、
どう見ても 1 **が**
"最大値みたいな値"
である。



- 1 **が上界である:**
  $\forall x \in I : f(x) \leq 1$
- 1 **より少しでも小さくしたら上界でない (最小の上界である):**
  $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : f(x) > 1 - \varepsilon$
  どんな (小さな) 正の数 ε **についても**
  或る (うまい／まずい) $x \in I$ **があって**
  $f(x)$ **が** $1 - \varepsilon$ **を超える**

このことを、

1 **が** f **の** I **における上限である**

と言い、 $\sup_{x \in I} f(x) = 1$ **と書く。**

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

：上下からの見積もり

$\longrightarrow$

$$s_\Delta \leq \text{“面積”} \leq S_\Delta$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta}$ **: 下積分**

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta}$ **: 上積分**

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない。

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$\longrightarrow\ s := \sup_{\Delta} s_{\Delta}$ ： **下積分**

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$\longrightarrow\ S := \inf_{\Delta} S_{\Delta}$ ： **上積分**

$$s \le \text{“面積”} \le S$$

一般に $s \le S$ であるが、$s = S$ とは限らない。

$s = S$ **のとき、**

これが "面積" と呼ぶべき唯一の値。

この時、f は $[a, b]$ で積分可能と言い、この値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き、f の $[a, b]$ に於ける定積分と呼ぶ。

例:

$$I = [0,1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\textbf{それ以外}) \end{cases}$$

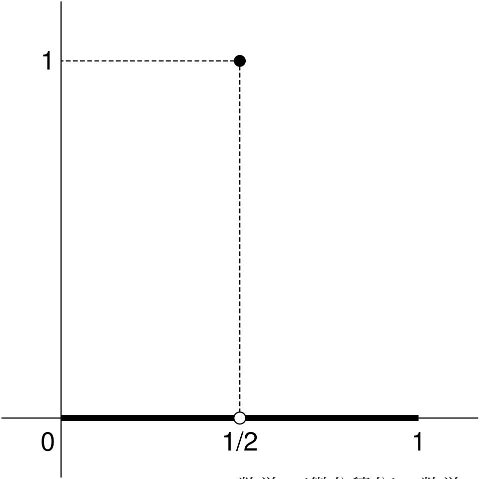
任意の分割 Δ **に対し、**$s_\Delta = 0$

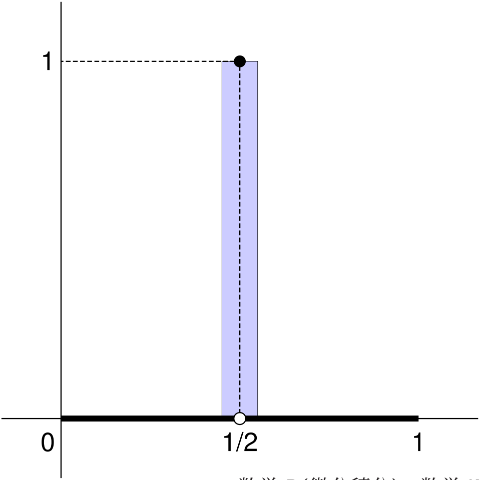
一方、

$\forall \varepsilon > 0$ **に対し、**$S_\Delta \leq \varepsilon$ **なる分割** Δ **が存在。**

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x)dx$$


1
0
1/2
1


1
0
1/2
1

$s \lneq S$ となる例

$$I = [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x : \text{有理数}) \\ 0 & (x : \text{無理数}) \end{cases}$$

任意の分割 $\triangle$ に対し、

$$s_\Delta = 0, \quad S_\Delta = 1$$

従って、

$$s = 0 \lneq S = 1$$

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった。

$a < c < b$ **とし、**
区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$$

同様に、

$$S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$$

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった。

$a < c < b$ **とし、**
区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$$
$$S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$$

従って、

f **が 区間** $[a,c],[c,b]$ **で積分可能**
$\Longrightarrow f$ **は区間** $[a,b]$ **でも積分可能で、**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- **(前回の演習のように)**
  n **等分だけを考えたのでは不充分なのか？**

- **実際に計算することは**
  不可能なのではないか？

$\longrightarrow$ **実は大丈夫で、次の定理が成り立つ。**

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- **(前回の演習のように)**
  n **等分だけを考えたのでは不充分なのか？**

- **実際に計算することは**
  不可能なのではないか？

$\longrightarrow$ **実は大丈夫で、次の定理が成り立つ。**

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- **(前回の演習のように)**
  n 等分だけを考えたのでは不充分なのか？

- **実際に計算することは**
  不可能なのではないか？

$\longrightarrow$ **実は大丈夫で、次の定理が成り立つ。**

Darboux の定理:

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ ： **分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、
$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分。

Darboux の定理:

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ **: 分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、
$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分。

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない。

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない。

しかし、幸いな (偉大な) ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である!!

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない。

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない。

しかし、幸いな (偉大な) ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である!!

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない。

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない。

しかし、幸いな (偉大な) ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である!!

定理:

f : **閉区間** $I = [a,b]$ **で連続**
(このとき自動的に有界)

$$\Downarrow$$

f : I **に於いて積分可能**

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a,x) = s(a,x) = \int_a^x f(t)dt$$

(上端 x **の関数で、定積分関数と呼ぶ)**
が f **の原始関数になっていることが判る。**

定理:

f : **閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
(このとき自動的に有界)
$\Downarrow$
f : I **に於いて積分可能**

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)dt$$

(上端 x **の関数で、定積分関数と呼ぶ)**
が f **の原始関数になっていることが判る。**

微分積分学の基本定理:

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続のとき

- $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

  即ち、$\displaystyle F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ とおくと、

  F は f の原始関数

- F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^x f(t)dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、
定積分関数は定数の差しかない。

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない (下端を指定しない) とき、単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、f の不定積分と呼ぶ。

一方、原始関数も、

定数だけ違ってもやはり原始関数

(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない。

微分積分学の基本定理:

f: 連続のとき、 不定積分 $=$ 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数 (逆微分) を知れば

積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの

諸公式・手法によれば良い。

一方、原始関数も、

定数だけ違ってもやはり原始関数

(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない。

微分積分学の基本定理:

f : 連続のとき、 不定積分 $=$ 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数 (逆微分) を知れば

積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの

諸公式・手法によれば良い。

一方、原始関数も、

定数だけ違ってもやはり原始関数

(微分したら同じ) なので、

普通は定数の差を気にしない。

微分積分学の基本定理:

f : 連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数

$\longrightarrow$ **原始関数 (逆微分) を知れば**

積分が計算できる

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**

諸公式・手法によれば良い。