

本講義後半の主題は、

積分

である。

高校で習った積分:

- 逆微分としての「原始関数」
 $f(x) = F'(x)$ となる F を求める
- 原始関数の区間両端での値の差としての「定積分」

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- 定積分は実は「面積」を表す

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い。

- 「積分」：面積を求める手法の探求
(エジプト・ギリシャ：2000年以上前)
- 「微分」：物体の運動の数学的探求
(Newton, Leibniz: 17世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた!!

… 「微分積分学の基本定理」

- 統一的な求積法としての「定積分」

- 積分の上端を動かして、
積分値を上端の関数とみる

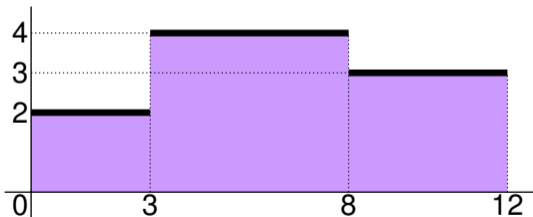
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt : \text{「定積分関数」}$$

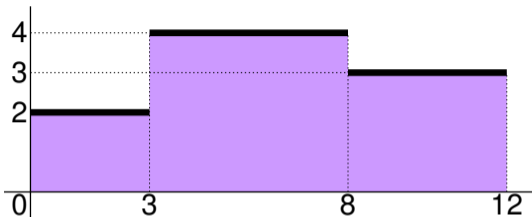
- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

$$I = \int_0^{12} f(x)dx, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 3) \\ 4 & (3 \leq x < 8) \\ 3 & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$





$$\begin{aligned} I &= \int_0^{12} f(x) dx \\ &= 2 \times 3 + 4 \times 5 + 3 \times 4. \end{aligned}$$

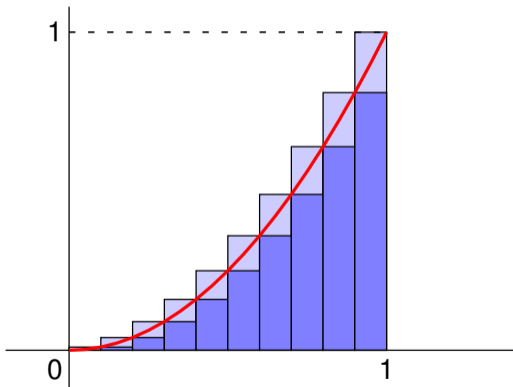
「積分」は「積和」である。

では、

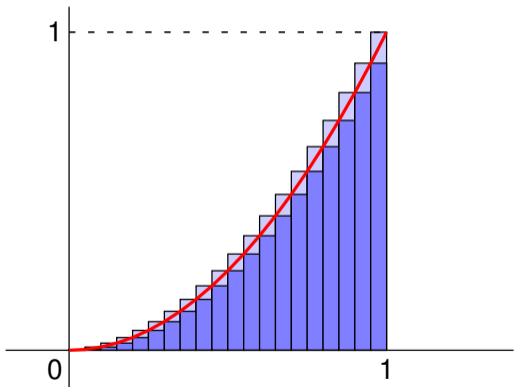
$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

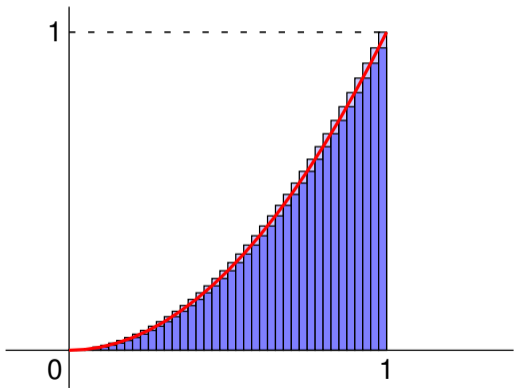
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \quad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \quad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \quad f(x) = x^2$$



演習:

$f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分

$$I = \int_0^a f(x) dx$$

を計算したい。分割

$$\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$$

を n 等分な分割 (即ち $x_i = \frac{ia}{n}$) とする。

(1) 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での
 $f(x)$ の下限 m_i および上限 M_i は?

$$(2) \quad s_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{及び}$$

$$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{を計算せよ。}$$

(3) 任意の n に対して $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ であることから、 $I = \int_0^a f(x)dx$ を求めよ。

($\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}$ が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)

どんなに細かく切っても、
その小区間内で定数になる訳ではないが、
上下から見積もることは出来るだろう。

$$\text{(下からの見積)} \leq \text{(面積)} \leq \text{(上からの見積)}$$

もしあれば

細かく切れば、
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、
これを「面積(積分)」と呼んで良いだろう。

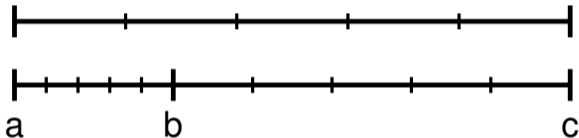
細かく切る方法は n 等分が簡単そうだが、
これだけを考えるのでは、話が旨く進まない。

例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

を示そうとすると...

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



n 等分点が食い違って比較し難い。

→ 予め

「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ。

余談 …… 現代数学の手法の特徴 (の一つ):

「苦勞を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦勞をしておくと、
後で証明が楽になる。

人間の都合でなく、
数学のものたちの気持ちに、
我々の気持ちを合わせる。

その代わり、
人間には判り難くなることもあるけれど。

では、少々苦勞はあるが、

「積分」の定義をきちんとしましょう。

仮定:

- 積分区間 $I = [a, b]$: 有界閉区間

- 被積分関数 $f : I$ で 有界
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
: 区間の分割

$\delta(\Delta) = \max_i (x_i - x_{i-1})$: 分割の最大幅

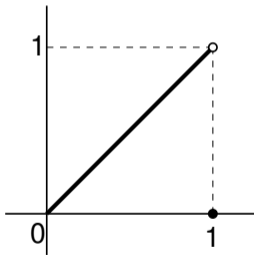
$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
: 各区間での下限・上限

上限・下限について (補足)

例: $I = [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

関数 $f(x)$ ($x \in I$) に
最大値はないが、
どう見ても 1 が
“最大値みたいな値”
である。



- 1 が上界である:

$$\forall x \in I : f(x) \leq 1$$

- 1 より少しでも小さくしたら上界でない
(最小の上界である):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : f(x) > 1 - \varepsilon$$

どんな (小さな) 正の数 ε についても

或る (うまい / まずい) $x \in I$ があって

$f(x)$ が $1 - \varepsilon$ を超える

このことを、

1 が f の I における **上限** である

と言い、 $\sup_{x \in I} f(x) = 1$ と書く。

$x \in I$

$$s_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S_{\Delta} = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

: 上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、 $s = S$ とは限らない。

$s = S$ のとき、

これが“面積”と呼ぶべき唯一の値。

この時、 f は $[a, b]$ で積分可能と言い、この値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き、 f の $[a, b]$ に於ける定積分と呼ぶ。

例:

$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

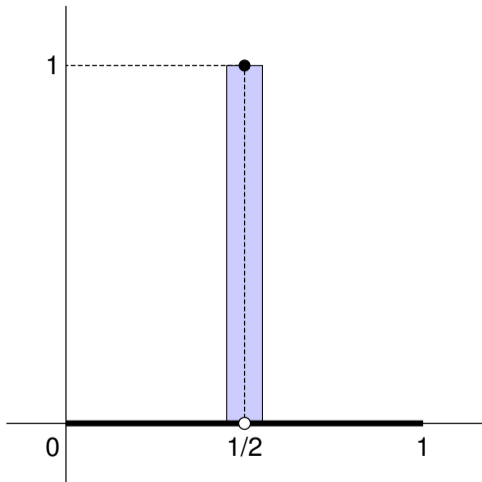
任意の分割 Δ に対し、 $s_{\Delta} = 0$

一方、

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $S_{\Delta} \leq \varepsilon$ なる分割 Δ が存在。

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$



$s \leq S$ となる例

$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x : \text{有理数}) \\ 0 & (x : \text{無理数}) \end{cases}$$

任意の分割 Δ に対し、

$$s_{\Delta} = 0, \quad S_{\Delta} = 1$$

従って、

$$s = 0 \leq S = 1$$

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった。

$a < c < b$ とし、
区間 $[a, b]$ に於ける下積分を $s(a, b)$ と書くと、

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

従って、

f が 区間 $[a, c], [c, b]$ で積分可能
 $\implies f$ は区間 $[a, b]$ でも積分可能で、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- (前回の演習のように)
 n 等分だけを考えたのでは不十分なのか？
- 実際に計算することは
不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ。

Darboux の定理:

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$: 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ となるような分割の列 $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分。

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない。

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない。

しかし、幸いな (偉大な) ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である!!

定理:

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端 x の関数で、**定積分関数**と呼ぶ)
が f の**原始関数**になっていることが判る。

微分積分学の基本定理:

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続のとき

- $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと、

F は f の原始関数

- F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、
定積分関数は定数の差しかない。

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない(下端を指定しない)とき、
単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、 f の不定積分と呼ぶ。

一方、原始関数も、

定数だけ違っててもやはり原始関数

(微分したら同じ)なので、

普通は定数の差を気にしない。

微分積分学の基本定理:

f : 連続のとき、不定積分 \equiv 原始関数

→ 原始関数 (逆微分) を知れば

積分が計算できる

→ 計算は今までに馴染みの

諸公式・手法によれば良い。