

期末試験のお知らせ

7月28日(月) 13:30 ~ 15:00

1-408 教室 (ここじゃない)

- (中間試験の復習)
- 積分を巡る諸々
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

補講 (質問会) のお知らせ

7月19日(土) 13:30 ~ 15:00

9-353 教室 (ここじゃない)

- 自習・勉強会・質問会
- 講義内容は進まない
- 試験範囲は広げない
- 出席は義務としない
- 質問がなければ14時頃に帰る

補講 (質問会) のお知らせ

当日の予定:

- 2時限目 (11:00 ~ 12:30)
「数学 A(線型代数)」補講 (9-353 教室)
- 引続き同じ教室で本授業の補講
(12:30 には来る予定)
- 3・4時限目 (13:30 ~)
「基礎物理実験演習」補講 (該当者のみ)
- 「基礎物理実験演習」補講対象者は
昼休み中に質問を済ませられたい。

「積分」の定義

仮定:

- 積分区間 $I = [a, b]$: 有界閉区間

- 被積分関数 $f : I$ で 有界

即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
: 区間の分割

$\delta(\Delta) = \max_i (x_i - x_{i-1})$: 分割の最大幅

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
: 各区間での下限・上限

$$s_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S_{\Delta} = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

: 上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、 $s = S$ とは限らない。

$s = S$ のとき、

これが“面積”と呼ぶべき唯一の値。

この時、 f は $[a, b]$ で積分可能と言い、この値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き、 f の $[a, b]$ に於ける定積分と呼ぶ。

Darboux の定理:

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$: 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

↓

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$ となるような分割の列 $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分。

定理:

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端 x の関数で、**定積分関数**と呼ぶ)
が f の**原始関数**になっていることが判る。

微分積分学の基本定理:

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続のとき

- $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと、

F は f の原始関数

- F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、
定積分関数は定数の差しかない。

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない(下端を指定しない)とき、
単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、 f の不定積分と呼ぶ。

一方、原始関数も、

定数だけ違ってやはり原始関数

(微分したら同じ)なので、

普通は定数の差を気にしない。

微分積分学の基本定理:

f : 連続のとき、不定積分 \equiv 原始関数

→ 原始関数 (逆微分) を知れば

積分が計算できる

→ 計算は今までに馴染みの

諸公式・手法によれば良い。

ところで、先日やった

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

だが、

$x = 1$ とすれば $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだ。

しかし、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

このような場合にも積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分

しかし、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

このような場合にも積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分

- 区間が有界で、端点で関数が非有界

例: $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- 区間が非有界 (無限区間)

例: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

→ 共に、収束・発散の判定が重要。

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

$f : [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ で定義され、
 $x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
 $[a, b - \varepsilon] = \{x \mid a \leq x \leq b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

は定義される。

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、

f は $[a, b)$ で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と書く。(広義積分が収束するとも言う。)

区間が非有界 (無限区間) で、関数が有界の場合

$f : [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の (どんな大きい) $M > a$ に対しても、
 $[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x) dx$$

は定義される。

区間が非有界 (無限区間) で、関数が有界の場合

この状況で、

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

が存在するとき、

f は $[a, +\infty)$ で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

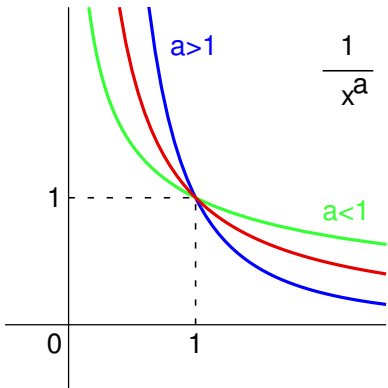
と書く。(広義積分が収束するとも言う。)

広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定 (の例)



$$\frac{1}{x^a}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \implies$ 収束

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \implies$ 収束

広義積分の収束判定 (の例)

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}$$
$$\implies \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}$$
$$\implies \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

注意: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ は収束するとは言わ**ない**。

$[-1, 0)$ と $(0, 1]$ とに分けて 別々に 考える。

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x} = \log \varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \rightarrow +0)$$

なので、

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}, \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} \text{ はどちらも収束しない。}$$

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x} : \underline{\Gamma \text{ 関数}}$$

- 広義積分は $s > 0$ で収束
- $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n + 1) = n!$

広義積分で定義される関数の例

$$B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)} : \underline{B \text{ 関数}}$$

- 広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束

- $$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$