4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる

$$\Updownarrow$$

$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式

$\longrightarrow$ **この t を用いて解く。**

$$g(t) = q^2 - 4(2t-p)(t^2-r)$$

$: 3$ **次分解式 (解核多項式,resolvent)**

$T := 2t$ **とおいて、**

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$$
$$R(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

$R(T)$ が因数分解できる

$\iff f(X)$ が 3 乗根を用いずに

(平方根だけで) 解ける

このような、方程式の "解け方" を統制する群

$\cdots$ (方程式・多項式の)Galois 群

方程式論としての Galois 理論
(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$：重根を持たない n 次多項式

$W := \{w \in \overline{K} | f(w) = 0\}$：$f$ の根全体
$=: \{w_1, \ldots, w_n\}$

$\mathrm{Gal}(f/K)$：
f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を保つような根の置換