

レポート問題の例 (1) (12/17 配布)

問 1. K を体とし、その代数閉包 \overline{K} を 1 つ取って固定する。 $f(X) \in K[X]$ を n 次分離的多項式、 $W = \{w \in \overline{K} \mid f(w) = 0\} =: \{w_1, \dots, w_n\}$ を f の根全体、 $L = \text{Spl}(f; K) = K(w_1, \dots, w_n)$ を K 上の f の最小分解体とする。 K 上の n 変数多項式環 $R := K[X_1, \dots, X_n]$ に対し、 K 上の環準同型 $\varphi : R \rightarrow L$ を $\varphi(X_i) = w_i$ で定め、 $I = I(f; K) := \text{Ker}\varphi$ とするとき、以下を示せ。

- (1) φ は全射環準同型である。
- (2) $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ は W の置換を定める。これより、 $\text{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ となる。(これにより $\text{Gal}(L/K)$ を \mathfrak{S}_n の部分群と同一視する。)
- (3) $\text{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(I) \subset I\}$ と定めると、 $\text{Gal}(f/K) = \text{Gal}(L/K)$ である。

問 2. $f(X) \in K[X]$ を K 上の n 次 monic 多項式とし、 $D(f)$ をその判別式とする。

- (1) w_1, \dots, w_n を f の根、 v_1, \dots, v_{n-1} を f' の根 (重根は重複度込みで考える) とするとき、

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n f'(w_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} f(v_j).$$

- (2) $f(X) = X^n - aX - b$ について判別式 $D(f)$ を求めよ。

問 3. 二重根号 $\xi := \sqrt{a + 2\sqrt{b}}$ の解け方の分類を、 $f(X) = X^4 - 2aX^2 + (a^2 - 4b)$ の Galois 群と関連させて述べよ。

問 4. n 次対称群 \mathfrak{S}_n について、 $\alpha = (1\ 2\ \dots\ n), \beta = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_n$ とするとき、 $\mathfrak{S}_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ となることを示せ。また、 n 次交代群 \mathfrak{A}_n について、これと似たような生成系で表すことを考えよ。

問 5. p を素数とする。 H を p 次対称群 \mathfrak{S}_p の可移部分群とする。

- (1) H は p 次巡換を含むことを示せ。
- (2) H が互換を 1 つでも含めば、 $H = \mathfrak{S}_p$ であることを示せ。

問 6. 上問を踏まえて、

- (1) $f(X) = X^5 - 20X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ について、 $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_5$ であることを示せ。
- (2) $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_7$ となる 7 次式 $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ の例を作れ。

問 7. 4 次既約分離多項式 $f(X) \in K[X]$ の 3 次分解式を

$$R_3(T) = R(X_1X_3 + X_2X_4; f)(T) \in K[T]$$

とする (Cardano-Ferrari の分解式)。

- (1) $D(f) = D(R_3)$ を示せ。
- (2) $R_3(T)$ の K 内での分解様式 (および判別式) による Galois 群の識別についてまとめよ。
- (3) Galois 群が D_4 または C_4 の時は、これだけでは識別できない。どうすれば識別できるか。
- (4) 代わりに $R((X_1 + X_3)(X_2 + X_4); f)(T)$ を考えるとどうか。

問 8. 5 次既約分離多項式 $f(X) \in K[X]$ に対し、

$P = ((X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_5 + X_5X_1) - (X_1X_3 + X_3X_5 + X_5X_2 + X_2X_4 + X_4X_1))^2$ に関する分解式 $R_6(T) = R(P; f)(T) \in K[T]$ を考える (Cayley-Weber の分解式)。 $R_6(T)$ の K 内での分解様式 (および判別式) による Galois 群の識別についてまとめよ。

問 9. 具体的な \mathbb{Z} 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ で、Galois 群が決定出来るような、ほどほどに非自明な例を作って、Galois 群を決定してみせよ。

問 10. 適当な体 k 上の 1 変数有理関数体 $K = k(t)$ 上の既約 monic 多項式 $f(X) \in K[X]$ で、Galois 群が決定出来るような、ほどほどに非自明な例を作って、Galois 群を決定してみせよ。また、 $t = a \in k$ を代入して得られる多項式 $f_a(X) \in k[X]$ について、 $\text{Gal}(f_a/k) \subsetneq \text{Gal}(f/K)$ となる $a \in k$ があればどんな時が論ぜよ。

問 11. その他、本講義の受講を機会に、新たに調べたり考えたりして解ったことがあれば、まとめてレポートとして良い。