Galois の逆問題 (構成問題)

K : **体と** G : **可移部分群** $\subset \mathfrak{S}_n$ **に対し、**

$\mathrm{Gal}(f/K) = G$ **となるような** $f(X) \in K[X]$ **は**

- **存在するか**
- **存在するなら**
  - $\star$ **具体的に構成せよ**
  - $\star$ **沢山 (無限個・パラメタ付きで) 作れ**
  - $\star$ **全部作れ**

パラメタ付きの多項式

k：体

$f(t;X) \in k(t)[X]$

：係数にパラメタ t が入った多項式

- 有理関数体 $K := k(t)$ 上の多項式と見る
- $t = a \in \widetilde{k} \supset k$ を代入する度に、

$f_a(X) = f(a;X) \in \widetilde{k}[X]$ を

$\widetilde{k}$ 上の多項式と見る

多項式をパラメタ付きで作る

- 有理関数体上での構成
  $\cdots$ 解析・幾何の援用

- パラメタに値を代入 (特殊化) する毎に
  異なる多項式が得られる
  $\longrightarrow$ G-拡大の無限族が得られることがある

多項式をパラメタ付きで作る

$\mathbb{C}(t)$ 上での構成 $\longleftarrow$ 被覆・基本群

$\Downarrow$ Weil descent (定義体の降下)

$\overline{\mathbb{Q}}(t)$ 上に落ちる

$\Downarrow$ ここは難しい (出来ない時もある？)

$\mathbb{Q}(t)$ 上に落とす

$\Downarrow$ Hilbert の既約性定理

$\mathbb{Q}$ 上での Galois 群の構成

$\mathbb{Q}$ 上での Galois 群の構成 (未解決問題)

任意の有限群 G は
$\mathbb{Q}$ 上の Galois 群として実現できるか？

即ち、

任意の有限群 G に対し、

$\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大 $K/\mathbb{Q}$ で、

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G$ **となるものが存在するか？**

$\mathbb{C}(t)$ 上での G-拡大の構成

$\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$: $\mathbb{C}$ 上の射影直線 (Riemann 球面)

主な構成法:

- $(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\mathbb{C}^\times$
- 貼合わせ
- $\mathbb{C}$ の 1 点 compact 化

1 次元連結複素多様体 (Riemann 面) を成す

$\mathbb{C}(t)$: $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の有理型関数体

(Liouville の定理)

$\mathbb{C}(t)$ 上での G-拡大の構成

Y : 1 次元連結複素多様体 (Riemann 面)

$f : Y \longrightarrow X = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$: 複素多様体の射 (被覆)

$$f^* : \mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(t) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y)$$

$$\varphi \longmapsto f^*(\varphi) := \varphi \circ f$$

: 関数体の射 (引き戻し)

$\longrightarrow$ $\mathbb{C}(X)$ を $\mathbb{C}(Y)$ の部分体と見る

このとき、

$$[\mathbb{C}(Y) : \mathbb{C}(X)] = \deg f$$ (被覆の次数)

$\mathbb{C}(t)$ 上での G-拡大の構成

$$\mathrm{Aut}(Y/X) := \{\varphi : Y \longrightarrow Y \mid f \circ \varphi = f\}$$

：Y/X の**被覆変換群**

$f : Y \longrightarrow X$ ： **Galois 被覆**

$$\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}(X)$$ ： **Galois 拡大**

このとき、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}(X)) \simeq \mathrm{Aut}(Y/X)$$

$\mathrm{Aut}(Y/X)$ を $\mathrm{Gal}(Y/X), \mathrm{Gal}(f)$ 等とも書く

被覆を統制する群としての基本群

$$\boxed{\text{基本群} = \text{普遍被覆の被覆変換群}}$$

$\pi_1(X, b)$：X の基本群 ($b \in X$：基点)

$\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow X$：$X$ の普遍被覆

とすると、

$$\pi_1(X, b) \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{X}/X)$$

更に、基本群の部分群と被覆とが対応

$\cdots$ 被覆の Galois 理論