

低次の多項式に対し、

具体的に、その **Galois** 群を計算してみよう

- 既約性判定
(**Gauss** の補題・**Eisenstein** の判定法など)
- 有限群・置換群の知識
(置換群のリスト・**Sylow** の定理
・有限群の表現論など)
- 「根の間の関係式」の候補
(**判別式**・**分解式** (**解核多項式**) など)

分解式・解核多項式 (resolvent)

$R := K[\mathbf{X}] = K[X_1, \dots, X_n]$: n 変数多項式環

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright R$: 変数の置換で作用 ($\sigma(X_i) = X_{\sigma(i)}$)

$P(\mathbf{X}) \in R$ に対し、

$${}^\sigma P(\mathbf{X}) = \sigma(P)(\mathbf{X}) := P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

$G_P := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid {}^\sigma P = P\}$: P の固定群

$S_P := \text{Ord}_{\mathfrak{S}_n}(P) = \{{}^\sigma P \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$: P の \mathfrak{S}_n -軌道

分解式・解核多項式 (resolvent)

$$G_P = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma P = P\}$$

$$S_P = \text{Ord}_{\mathfrak{S}_n}(P) = \{\sigma P \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

$$\begin{array}{ccc} S_P & \simeq & \mathfrak{S}_n / G_P \\ \sigma P & \longleftrightarrow & \sigma G_P \end{array}$$

(G-集合の準同型定理)

従って

$$\#S_P = \frac{n!}{\#G_P}$$

(Lagrange の定理!!)

Lagrange の定理(の元々の形)

n 次多項式の根から作った有理式 u に対し、
全ての根の置換 $n!$ 個のうち
 u を不変にする置換が m 個ならば、
$$m \mid n!$$

であり、 u は根の置換により

$d := \frac{n!}{m}$ 個の異なる値を取る。

更にこのとき、
 u は係数から作られる d 次多項式の根である。

分解式・解核多項式 (resolvent)

$f(X) \in K[X]$: 分離的, $\deg f = n$

$W = \{w_1, \dots, w_n\}$: f の根全体

$L := K(W) = \text{Spl}(f/K)$

: f の K 上の (最小) 分解体

$\varphi : R \longrightarrow L$: 全射環準同型

$h \longmapsto h(w_1, \dots, w_n)$

$I = I(f/K) := \text{Ker} \varphi$ とすると、

$$\text{Gal}(f/K) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(I) \subset I\}$$

分解式・解核多項式 (resolvent)

$P(X) \in R$ に対し、

$$\varphi(P) = P(w_1, \dots, w_n) \in L$$

$\varphi(P) \in L$ の K 上の共役は次の形:

$\sigma \in \text{Gal}(L/K) = \text{Gal}(f/K)$ に対し、

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi(P)) &= P(\sigma(w_1), \dots, \sigma(w_n)) \\ &= P(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}) \\ &= {}^\sigma P(w_1, \dots, w_n) = \varphi({}^\sigma P)\end{aligned}$$

しかし、この $\text{Gal}(f/K)$ が判らない

分解式・解核多項式 (resolvent)

とにかく、 $\text{Gal}(f/K) \in \mathfrak{S}_n$ なので、

次の形ではある:

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し、

$$\varphi({}^\sigma P) = {}^\sigma P(w_1, \dots, w_n) = P(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)})$$

(見た目上 $\#S_P$ 個)

このうちのどれだけが実際の K 上の共役か？

分解式・解核多項式 (resolvent)

$P(\mathbf{X}) \in R$ に対し、

$$\begin{aligned} R(P; f)(T) &:= \prod_{Q \in S_P} (T - Q(w_1, \dots, w_n)) \\ &= \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / G_P} (T - {}^\sigma P(w_1, \dots, w_n)) \\ &\in K[T] \end{aligned}$$

: P に関する f の**分解式 (resolvent)**

$R(P; f)(T)$ の K 上の既約分解の様式で
 $\text{Gal}(f/K)$ を識別する

分解式・解核多項式 (resolvent)

$R(P; f)(T)$ の K 上の既約分解の様式

$$\updownarrow \quad 1:1$$

$\text{Gal}(f/K) \setminus \mathfrak{S}_n / G_P$ (両側剰余類分解)

実際には、

G_P が程々の大きさになる P を巧く取って、
 $\text{Gal}(f/K)$ を選り分けていく

分解式・解核多項式 (resolvent)

自明な場合:

- $P = X_1$

$$G_P = \mathfrak{S}_{n-1}, \quad S_P = \{X_1, \dots, X_n\}$$

$$R(P; f)(T) = \prod_{i=1}^n (T - w_i) = f(T)$$

- P : 対称式

$$G_P = \mathfrak{S}_n, \quad S_P = \{P\}$$

$$R(P; f)(T) = T - P(w_1, \dots, w_n) \in K[T]$$

→ これでは役に立たない

例: 判別式 (discriminant)

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) \in R: \text{差積}$$

$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (w_i - w_j)$$

$$D(f) = \Delta(f)^2 : f \text{ の判別式} \in K$$

$$G_\Delta = \mathfrak{A}_n, \quad S(\Delta) = \{\Delta, -\Delta\}$$

$$R(\Delta; f)(T) = T^2 - D(f) \in K[T]$$

$$R(\Delta; f)(T) : K \text{ 上可約} \iff \text{Gal}(f/K) \subset \mathfrak{A}_n$$

例: $n = 3$

$f \in K[X] : K$ 上既約、 $\deg f = 3$ のとき、

$\text{Gal}(f/K)$ は $D(f)$ で識別可能

	位数	偶奇 : $R(\Delta; f)(T)$ の分解
$\mathfrak{A}_3 = C_3$	3	+ : (1次) \times (1次)
$\mathfrak{S}_3 = D_3$	6	- : 2次既約

例: $n = 4$

$f \in K[X] : K$ 上既約、 $\deg f = 4$

$P(\mathbf{X}) := X_1X_3 + X_2X_4 \in R$

$G_P = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle \simeq D_4$

$S_P =$

$\{X_1X_2 + X_3X_4, X_1X_3 + X_2X_4, X_1X_4 + X_2X_3\}$

$R_3(f)(T) := R(P; f)(T) \in K[T]$

例: $n = 4$

	位数	偶奇	$R_3(f)$ の分解
C_4	4	-	(1次) \times (2次)
V_4	4	+	(1次) \times (1次) \times (1次)
D_4	8	-	(1次) \times (2次)
\mathfrak{A}_4	12	+	3次既約
\mathfrak{S}_4	24	-	3次既約

C_4 or D_4 を除いて、
D(f) と $R_3(f)$ とで識別可能

判別式・分解式の具体的な計算

根の対称式

→ 基本対称式 (= f の係数) で書ける

→ 実演へ

4 次方程式の Ferrari の解法(回想)

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式

→ この t を用いて解く

4 次方程式の Ferrari の解法(回想)

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 (解核多項式, **resolvent**)

$T := 2t$ とおいて、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

例: $n = 4$

$f \in K[X] : K$ 上既約、 $\deg f = 4$

$P(\mathbf{X}) := X_1X_3 + X_2X_4 \in R$

$G_P = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle \simeq D_4$

$S_P =$
 $\{X_1X_2 + X_3X_4, X_1X_3 + X_2X_4, X_1X_4 + X_2X_3\}$

$R_3(f)(T) := R(P; f)(T) \in K[T]$

: **Cardano-Ferrari の分解式**

	位数	偶奇	$R_3(f)$ の分解
C_4	4	—	(1次) × (2次)
V_4	4	+	(1次) × (1次) × (1次)
D_4	8	—	(1次) × (2次)
\mathfrak{A}_4	12	+	3次既約
\mathfrak{S}_4	24	—	3次既約

C_4 or D_4 を除いて、

$D(f)$ と $R_3(f)$ とで識別可能

実は、 $D(f) = D(R_3(f))$ なので、

$\text{Gal}(f/K) = C_4, D_4$ のとき

$$K(\sqrt{D(f)}) = \text{Spl}(R_3(f)/K)$$

	位数	偶奇	$R_3(f)$ の分解
C_4	4	—	(1 次) \times (2 次)
V_4	4	+	(1 次) \times (1 次) \times (1 次)
D_4	8	—	(1 次) \times (2 次)
\mathfrak{A}_4	12	+	3 次既約
\mathfrak{S}_4	24	—	3 次既約

C_4 or D_4 を除いて、

$D(f)$ と $R_3(f)$ とで識別可能

実は、 $D(f) = D(R_3(f))$ なので、

$\text{Gal}(f/K) = C_4, D_4$ のとき

$$K(\sqrt{D(f)}) = \text{Spl}(R_3(f)/K)$$

例: $n = 4$

$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ のとき、

$$R_3(f)(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

(Cardano-Ferrari の分解式)

特に、 $q = 0$ (複二次式) のときは、

$$\begin{aligned} R_3(f)(T) &= T^3 - pT^2 - 4rT + 4pr \\ &= (T - p)(T^2 - 4r) \end{aligned}$$

→ $\text{Gal}(f/K) \subset D_4$

例: $n = 4$

$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ のとき、

$$R_3(f)(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

(Cardano-Ferrari の分解式)

特に、 $q = 0$ (複二次式) のときは、

$$\begin{aligned} R_3(f)(T) &= T^3 - pT^2 - 4rT + 4pr \\ &= (T - p)(T^2 - 4r) \end{aligned}$$

→ $\text{Gal}(f/K) \subset D_4$

例: $n = 4$

$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ のとき、

$$R_3(f)(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

(Cardano-Ferrari の分解式)

特に、 $q = 0$ (複二次式) のときは、

$$\begin{aligned} R_3(f)(T) &= T^3 - pT^2 - 4rT + 4pr \\ &= (T - p)(T^2 - 4r) \end{aligned}$$

→ $\text{Gal}(f/K) \subset D_4$

例: $n = 5$

$f \in K[X] : K$ 上既約、 $\deg f = 5$

$$P(\mathbf{X}) := (X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_5 + X_5X_1) \\ - (X_1X_3 + X_2X_4 + X_3X_5 + X_4X_1 + X_5X_2)$$

$$G_P = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 5)(3\ 4) \rangle \simeq D_5$$

$$G_{P^2} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 3\ 5\ 4) \rangle \simeq F_{5,4}$$

$$R_6(f)(T) := R(P^2; f)(T) \in K[T]$$

: **Cayley-Weber** の分解式