低次の多項式に対し、

具体的に、その Galois 群を計算してみよう

- **既約性判定**
  (Gauss の補題・Eisenstein の判定法など)
- **有限群・置換群の知識**
  (置換群のリスト・Sylow の定理
  ・有限群の表現論など)
- **「根の間の関係式」の候補**
  (判別式・分解式 (解核多項式) など)

分解式・解核多項式 (resolvent)

$R := K[\mathbf{X}] = K[X_1, \ldots, X_n]$：$n$ 変数多項式環

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright R$：変数の置換で作用 $(\sigma(X_i) = X_{\sigma(i)})$

$P(\mathbf{X}) \in R$ に対し、
$$^{\sigma}P(\mathbf{X}) = \sigma(P)(\mathbf{X}) := P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$

$G_P := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid {}^{\sigma}P = P\}$：$P$ の固定群

$S_P := \mathrm{Ord}_{\mathfrak{S}_n}(P) = \{{}^{\sigma}P \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$：$P$ の $\mathfrak{S}_n$-軌道

分解式・解核多項式 (resolvent)

$$G_P = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid {}^\sigma P = P\}$$

$$S_P = \mathrm{Ord}_{\mathfrak{S}_n}(P) = \{{}^\sigma P \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

$$\begin{array}{ccc} S_P & \simeq & \mathfrak{S}_n/G_P \\ {}^\sigma P & \leftrightsquigarrow & \sigma G_P \end{array}$$

(G-集合の準同型定理)

従って

$$\#S_P = \frac{n!}{\#G_P}$$

(Lagrange の定理!!)

分解式・解核多項式 (resolvent)

$f(X) \in K[X]$: **分離的**, $\deg f = n$

$W = \{w_1, \ldots, w_n\}$: f **の根全体**

$L := K(W) = \mathrm{Spl}(f/K)$
: f **の** K **上の (最小) 分解体**

$\varphi : R \longrightarrow L$: **全射環準同型**

$h \longmapsto h(w_1, \ldots, w_n)$

$I = I(f/K) := \mathrm{Ker}\varphi$ **とすると、**

$$\mathrm{Gal}(f/K) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) \subset I\}$$

分解式・解核多項式 (resolvent)

$P(X) \in R$ **に対し、**

$$R(P;f)(T) := \prod_{Q \in S_P} (T - Q(w_1, \ldots, w_n))$$

$$= \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / G_P} (T - {}^{\sigma}P(w_1, \ldots, w_n))$$

$$\in K[T]$$

： P **に関する** f **の分解式 (resolvent)**

$R(P;f)(T)$ **の** K **上の既約分解の様式で**
$\mathrm{Gal}(f/K)$ **を識別する**

分解式・解核多項式 (resolvent)

$R(P;f)(T)$ **の** K **上の既約分解の様式**

$$\updownarrow \quad 1:1$$

$\mathrm{Gal}(f/K)\backslash\mathfrak{S}_n/G_P$ **(両側剰余類分解)**

実際には、
G_P **が程々の大きさになる** P **を巧く取って、**
$\mathrm{Gal}(f/K)$ **を選り分けていく**

例: 判別式 (discriminant)

$$\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (X_i - X_j) \in R\text{: 差積}$$

$$\Delta(f) = \prod_{1 \le i < j \le n} (w_i - w_j)$$

$$D(f) = \Delta(f)^2 : f \text{ の判別式} \in K$$

$$G_\Delta = \mathfrak{A}_n, \quad S(\Delta) = \{\Delta, -\Delta\}$$

$$R(\Delta; f)(T) = T^2 - D(f) \in K[T]$$

$$R(\Delta; f)(T) : K \text{ 上可約} \iff \mathrm{Gal}(f/K) \subset \mathfrak{A}_n$$

例: $n = 3$

$f \in K[X]$: K **上既約、** $\deg f = 3$ **のとき、**

$\mathrm{Gal}(f/K)$ **は** $D(f)$ **で識別可能**

	位数	**偶奇** : $R(\Delta; f)(T)$ **の分解**
$\mathfrak{A}_3 = C_3$	3	$+$: (1 **次**) $\times$ (1 **次**)
$\mathfrak{S}_3 = D_3$	6	$-$: 2 **次既約**

例: $n = 4$

$f \in K[X]$: K **上既約、** $\deg f = 4$

$P(\mathbf{X}) := X_1X_3 + X_2X_4 \in R$

$G_P = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle \simeq D_4$

$S_P =$

$$\{X_1X_2 + X_3X_4, X_1X_3 + X_2X_4, X_1X_4 + X_2X_3\}$$

$R_3(f)(T) := R(P; f)(T) \in K[T]$

: **Cardano-Ferrari の分解式**

例: $n = 4$

	位数	**偶奇**	$R_3(f)$ **の分解**
C_4	4	$-$	(1 **次**) $\times$ (2 **次**)
V_4	4	$+$	(1 **次**) $\times$ (1 **次**) $\times$ (1 **次**)
D_4	8	$-$	(1 **次**) $\times$ (2 **次**)
$\mathfrak{A}_4$	12	$+$	3 **次既約**
$\mathfrak{S}_4$	24	$-$	3 **次既約**

C_4 **or** D_4 **を除いて、**

$D(f)$ **と** $R_3(f)$ **とで識別可能**

実は、 $D(f) = D(R_3(f))$ **なので、**

$\mathrm{Gal}(f/K) = C_4, D_4$

$$\Longrightarrow \mathrm{Spl}(R_3(f)/K) = K(\sqrt{D(f)})$$

例: $n = 4$

$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ **のとき、**

$$R_3(f)(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

(Cardano-Ferrari の分解式)

特に、 $q = 0$ **(複二次式) のときは、**

$$\begin{aligned} R_3(f)(T) &= T^3 - pT^2 - 4rT + 4pr \\ &= (T - p)(T^2 - 4r) \end{aligned}$$

$\longrightarrow \mathrm{Gal}(f/K) \subset D_4$

例: $n = 5$

$\mathfrak{S}_5$ の可移部分群のリスト

	位数	偶奇	構造
C_5	5	$+$	$\simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
D_5	10	$+$	$\simeq \{\pm 1\} \ltimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$F_{5,4}$	20	$-$	$\simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \ltimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$\mathfrak{A}_5$	60	$+$	**非可解 (単純群)**
$\mathfrak{S}_5$	120	$-$	**非可解**

(共役を除いて 5 種)

例: $n = 5$

$f \in K[X]$: K **上既約、** $\deg f = 5$

$$P(\mathbf{X}) := (X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_5 + X_5X_1) - (X_1X_3 + X_2X_4 + X_3X_5 + X_4X_1 + X_5X_2)$$

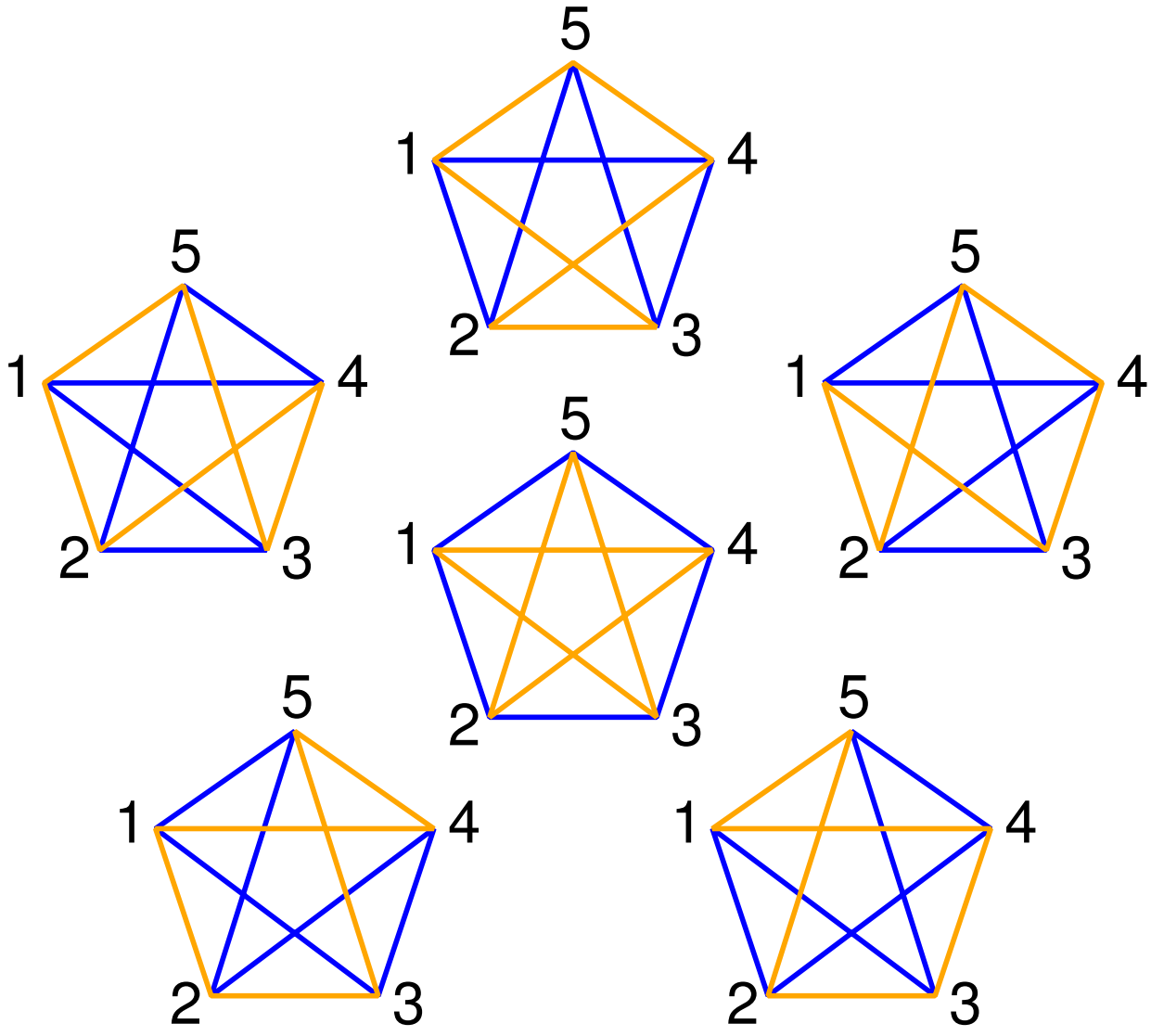
$$G_P = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4)(2\ 3) \rangle \simeq D_5$$

$$G_{P^2} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2\ 4\ 3) \rangle \simeq F_{5,4}$$

$$R_6(f)(T) := R(P^2; f)(T) \in K[T]$$

: **Cayley-Weber の分解式**

例: $n = 5$



例: $n = 5$

	位数	偶奇	$R_6(f)$ の分解
C_5	5	$+$	(1 次) $\times$ (5 次)
D_5	10	$+$	(1 次) $\times$ (5 次)
$F_{5,4}$	20	$-$	(1 次) $\times$ (5 次)
$\mathfrak{A}_5$	60	$+$	6 次既約
$\mathfrak{S}_5$	120	$-$	6 次既約

C_5 or D_5 を除いて、

$D(f)$ と $R_6(f)$ とで識別可能

特に、$R_6(f)$ が K 内に根を持つ

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Gal}(f/K)$: 可解

例: $n = 5$

	位数	偶奇	$R_6(f)$ の分解
C_5	5	$+$	(1 次) $\times$ (5 次)
D_5	10	$+$	(1 次) $\times$ (5 次)
$F_{5,4}$	20	$-$	(1 次) $\times$ (5 次)
$\mathfrak{A}_5$	60	$+$	6 次既約
$\mathfrak{S}_5$	120	$-$	6 次既約

C_5 or D_5 を除いて、

$D(f)$ と $R_6(f)$ とで識別可能

特に、$R_6(f)$ が K 内に根を持つ

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Gal}(f/K)$: 可解

Galois の逆問題 (構成問題)

K：**体と** G：**可移部分群** $\subset \mathfrak{S}_n$ **に対し、**

$\mathrm{Gal}(f/K) = G$ **となるような** $f(X) \in K[X]$ **は**

- **存在するか**
- **存在するなら**
  - ⋆ **具体的に構成せよ**
  - ⋆ **沢山 (無限個・パラメタ付きで) 作れ**
  - ⋆ **全部作れ**

パラメタ付きの多項式

k : **体**

$f(t;X) \in k(t)[X]$

: 係数にパラメタ t **が入った多項式**

- **有理関数体** $K := k(t)$ **上の多項式と見る**
- $t = a \in \widetilde{k} \supset k$ **を代入する度に、**

$$f_a(X) = f(a;X) \in \widetilde{k}[X]$$ **を**

$\widetilde{k}$ **上の多項式と見る**

多項式をパラメタ付きで作る

- 有理関数体上での構成
  $\cdots$ 解析・幾何の援用

- パラメタに値を代入 (特殊化) する毎に
  異なる多項式が得られる
  $\longrightarrow$ G-拡大の無限族が得られることがある

多項式をパラメタ付きで作る

$\mathbf{C}(t)$ 上での構成 $\longleftarrow$ 被覆・基本群

$\Downarrow$ Weil descent (定義体の降下)

$\overline{\mathbf{Q}}(t)$ 上に落ちる

$\Downarrow$ ここは難しい (出来ない時もある？)

$\mathbf{Q}(t)$ 上に落とす

$\Downarrow$ Hilbert の既約性定理

$\mathbf{Q}$ 上での Galois 群の構成