

代表的な計算モデル

- 有限オートマトン
(有限状態機械, **finite automaton**)
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
 A を認識する有限オートマトン M
 が存在するか？
- 有限オートマトンによって
 認識可能な言語はどのようなものか？

→ 正規言語・正規表現

有限オートマトンでの計算可能性問題

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!
(\iff 正規でない言語が存在する)

例: $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
(a と b との個数が同じ)

証明は部屋割り論法
(の一種の pumping lemma)
による

Pumping Lemma(注入補題・反復補題)

正規言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbf{N} :$

$\forall w \in A, |w| \geq n :$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz$

(1) $y \neq \varepsilon$

(2) $|xy| \leq n$

(3) $\forall k \geq 0 : xy^kz \in A$

非決定性有限オートマトンで認識できない
言語が存在する!!



より強力な計算モデルが必要



- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

例: “文法的に正しい” 数式とは
どのようなものか?

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字 (変数名) は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

→ これは式を作り出す規則とも考えられる

“文法的に正しい” 数式

初期記号 (開始変数) E から出発して、
次の規則のいずれかを

“非決定的に” 適用して得られるもの のみ

- $E \rightarrow A$
- $E \rightarrow EBE$
- $E \rightarrow (E)$
- $A \rightarrow$ 変数名のどれか
- $B \rightarrow$ 演算子のどれか
- 変数名・演算子・ (\cdot) は
それ以上書換えない (終端記号)

→ 生成規則 (書換規則)

生成規則・生成文法

生成規則を与えることでも

言語を定めることが出来る

→ 生成文法 (generative grammar)

生成規則による“正しい”語の生成

- 初期変数を書く
- 今ある文字列中の或る変数を生成規則のどれかで書換える
- 変数がなくなったら終わり

例: $\{a^{2n}b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$

(a が偶数個 (0 個も可) 続いた後に、
 b が奇数個続く)

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \rightarrow aaS$
- $S \rightarrow bB$
- $B \rightarrow bbB$
- $B \rightarrow \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \rightarrow aaS \mid bB$
- $B \rightarrow bbB \mid \varepsilon$

生成規則・生成文法

実際の (自然言語を含めた) “文法” では、
或る特定の状況で現われた場合だけ
適用できる規則もあるだろう

そのような生成規則は例えば次の形:

- $uAv \rightarrow uvw$

$u, v \in \Sigma^*$: 文脈 (context)

変数 A が uAv の形で現われたら、
語 $w \in \Sigma^*$ で書換えることができる

生成文法の形式的定義

- V : 有限集合 (変数の集合)
- Σ : 有限集合 (終端記号の集合)
ここに $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R : 有限集合 $\subset (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$
(規則の集合)
- $S \in V$: 開始変数

$(v, w) \in R$ が生成規則 $v \rightarrow w$ を表す

文脈自由文法 (context-free grammar)

文脈が全て空列 ε

即ち、規則が全て $A \rightarrow w$ ($A \in V$) の形

文脈自由文法の形式的定義

- V : 有限集合 (変数の集合)
- Σ : 有限集合 (終端記号の集合)
ここに $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R : 有限集合 $\subset V \times (V \cup \Sigma)^*$
(規則の集合)
- $S \in V$: 開始変数

$(A, w) \in R$ が生成規則 $A \rightarrow w$ を表す

- 例: 言語 $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ は
正規言語ではないが文脈自由言語である:
- $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$

従って、

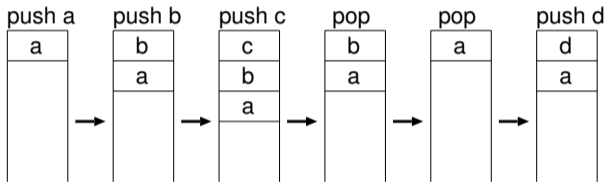
文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
… プッシュダウンオートマトン

プッシュダウンオートマトン

(非決定性) 有限オートマトンに
プッシュダウンスタックを取り付けたもの



無限 (非有界) の情報を保持できるが、
読み書きは先頭だけ

... **LIFO (Last In First Out)**

プッシュダウンオートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$$

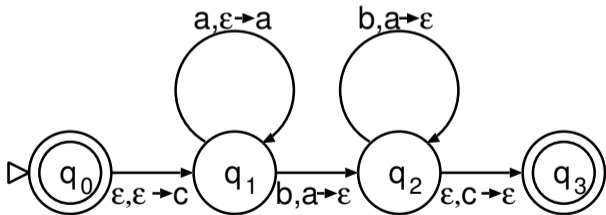
- Q : 有限集合 ... 状態の集合
- Σ : 有限集合 ... **alphabet**
- Γ : 有限集合 ... **stack alphabet**
 $\Sigma_\epsilon := \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $\Gamma_\epsilon := \Gamma \cup \{\epsilon\}$ と置く
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$
: 遷移関数 ... 可能な遷移先全体
- $s \in Q$... 初期状態
- $F \subset Q$... 受理状態の集合

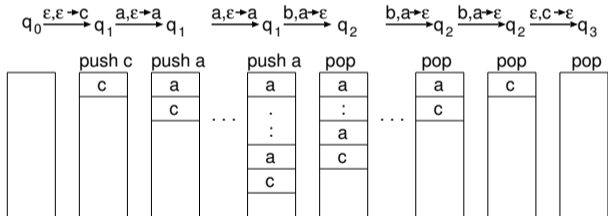
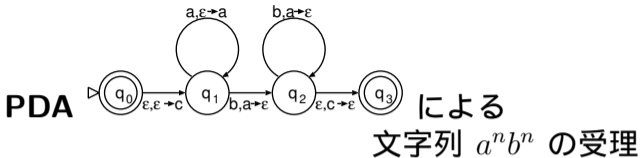
$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

- $(r, y) \in \delta(q, a, x)$ とは、
「入力 a を読んだとき、
状態 q でスタックの先頭が x なら、
スタックの先頭を y に書換えて、
状態 r に移って良い」
ということ (pop; push y)
- $x = y$ は書き換え無し
- $x = \varepsilon$ は **push** のみ
- $y = \varepsilon$ は **pop** のみ
- $a = \varepsilon$ は入力を読まずに遷移

例: 言語 $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ を認識する
プッシュダウンオートマトン

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \Gamma = \{a, b, c\}$$





定理:

L : 文脈自由言語



L が或るプッシュダウンオートマトンで
認識される

文脈自由言語の例

回文全体の成す言語は文脈自由

- $S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\epsilon$

問: 回文全体の成す言語を認識する
プッシュダウンオートマトンを構成せよ

文脈自由言語の例

回文全体の成す言語は文脈自由

- $S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\varepsilon$

問: 回文全体の成す言語を認識する
プッシュダウンオートマトンを構成せよ

文脈自由言語の例

回文全体の成す言語は文脈自由

- $S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\varepsilon$

問: 回文全体の成す言語を認識する
プッシュダウンオートマトンを構成せよ

プッシュダウンオートマトンでは

認識できない言語の例

同じ文字列 2 回の繰返しから成る文字列全体

$$A = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$$

入力を読み直せないのが弱点

→ より強力な計算モデルが必要

プッシュダウンオートマトンでは

認識できない言語の例

同じ文字列 2 回の繰返しから成る文字列全体

$$A = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$$

入力を読み直せないのが弱点

→ より強力な計算モデルが必要

プッシュダウンオートマトンでは

認識できない言語の例

同じ文字列 2 回の繰返しから成る文字列全体

$$A = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$$

入力を読み直せないのが弱点

→ より強力な計算モデルが必要

一つの方法としては、

入力を覚えておくために

プッシュダウンスタックをもう一つ

使えることにする

実際これで真により強い計算モデルが得られる

しかし、通常はこれと同等な

次のような計算モデルを考える

… チューリングマシン

一つの方法としては、

入力を覚えておくために

プッシュダウンスタックをもう一つ

使えることにする

実際これで真により強い計算モデルが得られる

しかし、通常はこれと同等な

次のような計算モデルを考える

… チューリングマシン

チューリングマシン

- 有限個の内部状態を持つ
- 入力データはテープ上に一区画一文字ずつ書き込まれて与えられる
- データを読み書きするヘッドがテープ上を動く
- 遷移関数は次の形:
内部状態とヘッドが今いる場所の文字とによって、その場所の文字を書き換え、次の内部状態に移り、ヘッドを左か右かに動かす
- 受理状態または拒否状態に達したら停止するが、停止しないこともある

(非決定性) チューリングマシンによる

言語 $A = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ の認識

