

期末試験のお知らせ

7月27日(月) 15:15 ~ 16:15
(60分試験)

9-255 教室 (ここじゃない)

- 今日の講義内容まで
- 学生証必携

レポート提出について

期日: **8月7日(金)20時頃まで**

内容:

配布プリントのレポート問題の例のような内容
及び授業に関連する内容で、
授業内容の理解または発展的な取組みを
アピールできるようなもの

提出方法:

- 授業時に手渡し
- 4-574 室扉のレポートポスト
- 電子メール

さて、本講義最後の話題は、

計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム (計算手順) は、
チューリングマシンで実装できる」

(アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ)

… 「アルゴリズム」の定式化

計算量 (complexity)

- **時間計算量**: 計算に掛かるステップ数
(TM での計算の遷移の回数)
- **空間計算量**: 計算に必要なメモリ量
(TM での計算で使うテープの区画数)

通常は、決まった桁数の四則演算 1 回を
1 ステップと数えることが多い

入力データ長 n に対する
増加のオーダー (Landau の O -記号) で表す

Landau の O -記号・ o -記号

$f, g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ に対し、

$$f = O(g) \iff \exists N > 0, \exists C > 0 : \forall n : \\ (n \geq N \implies f(n) \leq Cg(n))$$

$$f = o(g) \iff \frac{f(n)}{g(n)} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n : \\ (n \geq N \implies f(n) \leq \varepsilon g(n))$$

計算量 (complexity)

問題を解くアルゴリズムによって決まる

… アルゴリズムの計算量

→ アルゴリズムの効率 の評価

問題の計算量:

その問題を解くアルゴリズムの計算量の下限

最も効率良く解くと、どれ位で解けるか

= どうしてもどれ位必要か

= どれ位難しい問題か

→ 問題の難しさ の評価

例:

- 加法: $O(n)$

- 乗法: $O(n^2)$
かと思いきや $O(n \log n \log \log n)$
(高速フーリエ変換 (FFT))

例: 互除法

- 入力: 正整数 x, y

入力データ長:

$$n = \lceil \log_2 x \rceil + \lceil \log_2 y \rceil \sim \max\{\log x, \log y\}$$

- 出力: 最大公約数 $d = \gcd(x, y)$

計算量の評価:

- 割算の回数: $O(n)$
- 1回の割算: 素朴な方法でも $O(n^2)$
(FFT を使えば $O(n \log n \log \log n)$)

→ 併せて $O(n^3)$ (FFT で $O(n^2 \log n \log \log n)$)
… 十分に高速なアルゴリズム

重要な難しさのクラス

多項式時間 P $\dots \exists k : O(n^k)$

“事実上計算可能な難しさ”

「しらみつぶし」が入ると
大体 $O(2^n)$ 程度以上になる (指数時間 EXP)
“事実上計算不可能”

例: 素数判定 (PRIMES)

$n = \log_2 N$: N の二進桁数

試行除算 (小さい方から割っていく) だと
 $O(n^k 2^{n/2})$ くらい掛かりそう

実は多項式時間で解ける!!

Agrawal-Kayal-Saxena

“PRIMES is in P” (2002)

(出版は

Ann. of Math. 160(2) (2004),781-793.)

このような効率の良い素数判定は、
具体的に素因数を見付けている訳ではない

素因数分解は P であるかどうか未解決
(多項式時間アルゴリズムが知られていない)

現状で知られているのは、
“準指数時間” $L_N[u, v]$ ($0 < u < 1$)
のアルゴリズム
(現時点で最高速なのは $u = 1/3$)

素因数分解アルゴリズム等の計算量を表すのに

$$L_N[u, v] := \exp(v(\log N)^u (\log \log N)^{1-u})$$

が良く用いられる

$n = \log N$ (N の桁数) とおくと、

- $L_N[0, v] = e^{v \log \log N} = n^v$: 多項式時間
- $L_N[1, v] = e^{v \log N} = e^{vn}$: 指数時間

代表的な素因数分解法

- $(p - 1)$ -法
- 楕円曲線法 (Elliptic Curve Method)
- 二次篩法 (Quadratic Sieve)
- 数体篩法 (Number Field Sieve)

計算困難な問題の数理技術としての利用

素因数分解の困難さを利用した暗号方式
… **RSA 暗号** (Rivest-Shamir-Adleman)

鍵となる整数 n の素因数分解を
知っていれば解読できるが、
知らないと解読できない

→ 来年春期の「応用数学Ⅰ / 情報数学特論」で

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

非決定性多項式時間 (NP):

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例: 素因数分解は NP

… 素因数を知っていれば割算 1 回だけ

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ
(賞金 \$1M)

おしまい