情報源符号化の定式化

情報源 alphabet S : 有限集合

$S^+ := \bigsqcup_{n \geq 1} S^n$: S **の元の** 1 **個以上の列の全体**

$S^0 := \{\varepsilon\}$: **空語のみ**

$S^* := \bigsqcup_{n \geq 0} S^n$: S **の元の** 0 **個以上の列の全体**

$$= S^+ \sqcup \{\varepsilon\}$$

$w \in S^n$ **に対し、** $|w| := n$ **(文字列の長さ)**

情報源符号化の定式化

符号 (伝送)alphabet T : 有限集合
(しばしば $T = \{0, 1\}$)

$\mathcal{C} : S \longrightarrow T^+$: **符号 (code)**

$\mathcal{C}$ の像の元 $\mathcal{C}(s) \in T^+$ ($s \in S$)
: 符号語 (code word)

$\longrightarrow$ **文字列を並べて $\mathcal{C}^* : S^* \longrightarrow T^*$ に延長**

符号への要請

- **一意復号可能 (uniquely decodable) か ？**
- **一意復号可能とした上で、瞬時復号可能 (instantaneously decodable) か ？**
- **その上で効率が良いか ？**

符号への要請

- **一意符号 (uniquely decodable code):**

$$\mathcal{C}^* : S^* \longrightarrow T^* : \textbf{単射}$$

- **瞬時符号 (instantaneous code):**

$$\mathcal{C}^*(\boldsymbol{x}) = \mathcal{C}(s)\boldsymbol{w} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = s\boldsymbol{y}$$

(最初に届いた符号語 $\mathcal{C}(s)$ で
最初の文字 s が復元できる)

- **効率が良い $\cdots$ 符号長 $|\mathcal{C}(s)|$ が小さい**

一意復号可能でない例

$$S = \{a, b, c\}, T = \{0, 1\}$$

$$\mathcal{C} : S \longrightarrow T^{+}$$

$$a \longmapsto 0$$

$$b \longmapsto 01$$

$$c \longmapsto 001$$

「001」が ab か c か判らない

$\longrightarrow$ **一意復号可能でない!!**

瞬時復号可能でない例

$S = \{a, b, c\}, T = \{0, 1\}$

$$\mathcal{C} : S \longrightarrow T^+$$

$$a \longmapsto 0$$

$$b \longmapsto 01$$

$$c \longmapsto 11$$

一意復号可能ではあるが、
「011$\cdots$」まで見ただけでは
ac$\cdots$ か bc$\cdots$ か判らない
(「0111」なら bc、「01111」なら acc)

$\longrightarrow$ **瞬時復号可能でない!!**

瞬時復号可能な例

$$S = \{a, b, c\}, T = \{0, 1\}$$

$$\mathcal{C} : S \longrightarrow T^+$$

$$a \longmapsto 0$$

$$b \longmapsto 10$$

$$c \longmapsto 11$$

$$\longrightarrow \mathcal{C}(S) = \{0, 10, 11\} \subset T^+$$

だけを見て判る特徴があるか ？

瞬時符号の性質

- $\mathcal{C}$：瞬時符号 $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$：一意符号

- $\mathcal{C}$：瞬時符号
  $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$：語頭符号 (prefix code)
  $(\mathcal{C}(s') = \mathcal{C}(s)\boldsymbol{x} \Longrightarrow s' = s, \boldsymbol{x} = \varepsilon)$

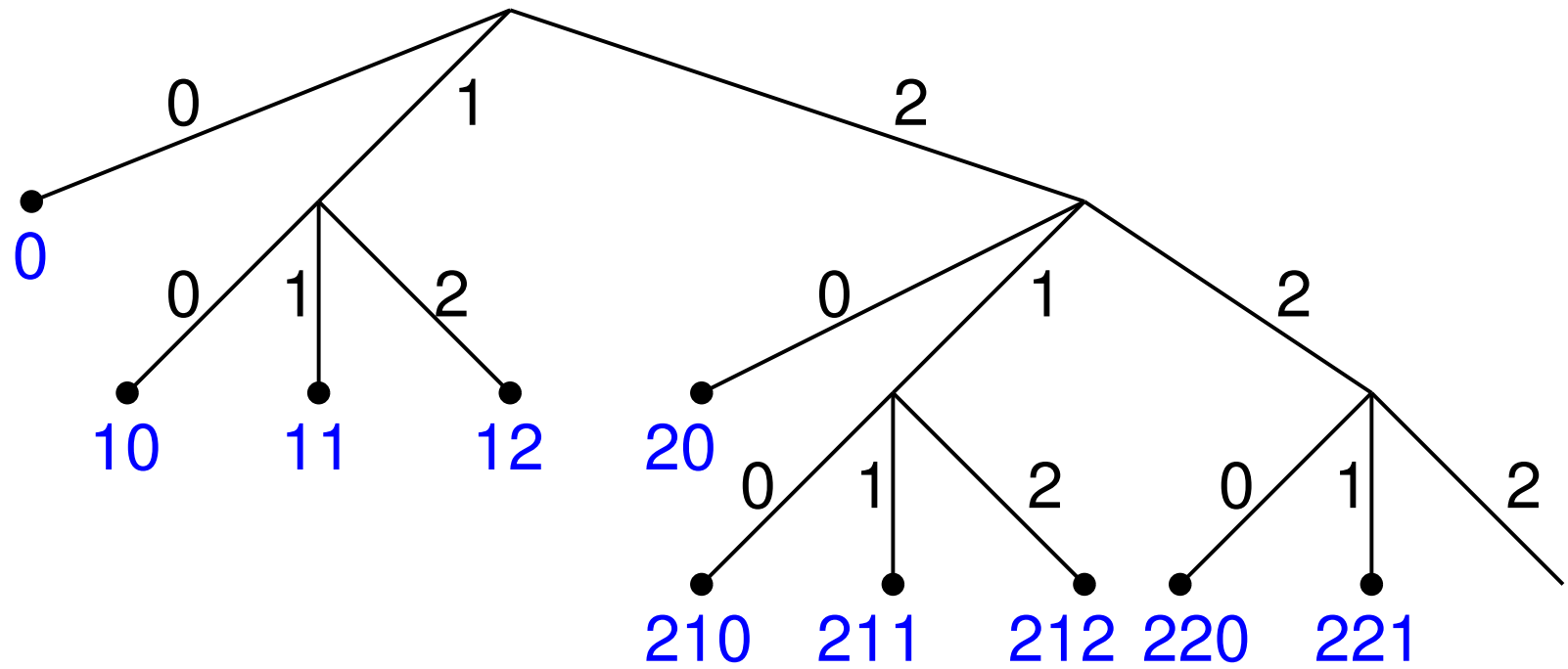
瞬時符号の作り方

「符号語木」を考えよう

符号語木

例: $T = \{0, 1, 2\}$

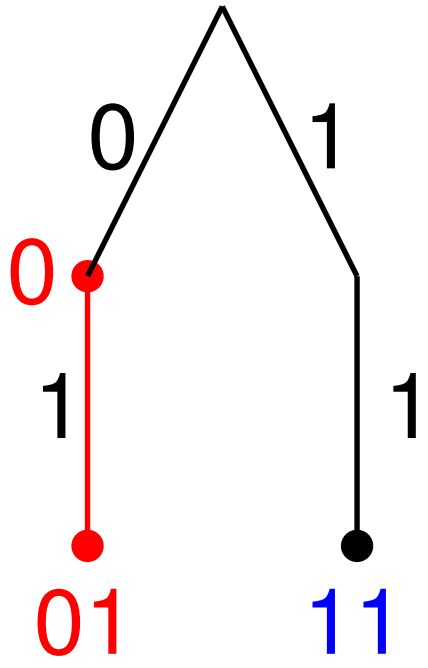
$\mathcal{C}(S) = \{0, 10, 11, 12, 20, 210, 211, 212, 220, 221\}$



符号語木と瞬時復号可能性

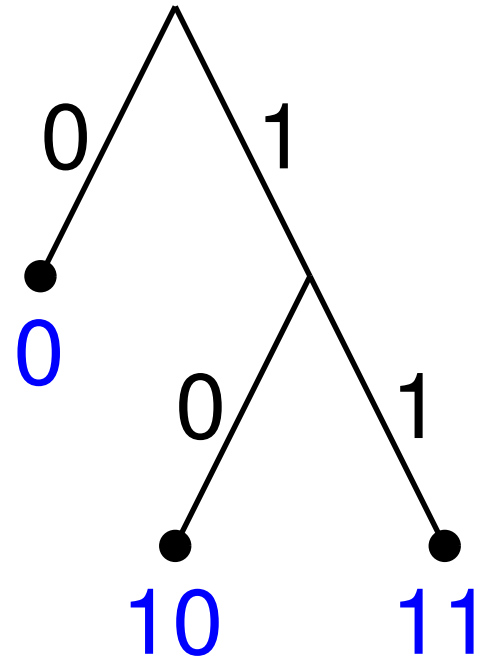
例: $T = \{0, 1\}$

$\mathcal{C}(S) = \{0, 01, 11\}$



瞬時復号可能でない

$\mathcal{C}(S) = \{0, 10, 11\}$



瞬時復号可能

瞬時符号の効率

瞬時符号という条件を満たしつつ、

出来るだけ効率良くしたい

(符号長のリスト

$$(|\mathcal{C}(s)|)_{s\in S} = (\mathcal{C}(s_1), \mathcal{C}(s_2), \ldots, \mathcal{C}(s_k))$$

を出来るだけ “小さく” したい)

Kraft の不等式

$S = \{s_1, \ldots, s_k\}, \qquad \#T = r$

自然数列 $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ **に対し、**

各符号語長 $|\mathcal{C}(s_i)| = \ell_i$ **なる**

r **元 瞬時符号 が存在**

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

瞬時符号 $\Longrightarrow$ 一意符号 (逆は真ならず)
(一意符号の方が条件が弱い)

一意符号でも良ければ、
符号長のリストはもっと小さく出来ないか ？

$\longrightarrow$ 実は同じ条件にしかならない

(一意符号が存在すれば、
同じ符号長のリストの瞬時符号が存在)

瞬時符号 $\Longrightarrow$ 一意符号 (逆は真ならず)
(一意符号の方が条件が弱い)

一意符号でも良ければ、
符号長のリストはもっと小さく出来ないか ？

$\longrightarrow$ 実は同じ条件にしかならない

(一意符号が存在すれば、
同じ符号長のリストの瞬時符号が存在)

McMillan の不等式

$S = \{s_1, \ldots, s_k\}, \qquad \#T = r$

自然数列 $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ **に対し、**

各符号語長 $|\mathcal{C}(s_i)| = \ell_i$ **なる**

r **元 一意符号 が存在**

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r^{\ell_i}} \leq 1$$

母関数

数列 (a_n) から関数を作る

$\longrightarrow$ **解析的手法の利用**

- $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$: **(通常の) 母関数**
- $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} X^n$: **指数型母関数**
- $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} X^n$: **対数型母関数**
- $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$: **Dirichlet 級数**

例: $k = 2$ **の時**

情報源の長さ 0**:**

ε	X^0
	1

情報源の長さ 1**:**

w_1	X^{ℓ_1}
w_2	X^{ℓ_2}
	$X^{\ell_1} + X^{\ell_2}$

情報源の長さ 2**:**

$w_1 w_1$	$X^{\ell_1} X^{\ell_1} = X^{2\ell_1}$
$w_1 w_2$	$X^{\ell_1} X^{\ell_2} = X^{\ell_1+\ell_2}$
$w_2 w_1$	$X^{\ell_2} X^{\ell_1} = X^{\ell_1+\ell_2}$
$w_2 w_2$	$X^{\ell_2} X^{\ell_2} = X^{2\ell_2}$
	$\left(X^{\ell_1} + X^{\ell_2}\right)^2$

ところで、

モールス符号では

1 文字のための符号長が区々であった

$\longleftarrow$ 頻度の高い文字は短く、低い文字は長く

$\longrightarrow$ 頻度まで考慮して符号長の期待値を短く

$\cdots$ 頻度 (出現確率) を考慮して

符号効率の定式化を考えている

「情報源 alphabet と頻度との組」

が符号化の対象

ところで、

モールス符号では
1 文字のための符号長が区々であった

$\longleftarrow$ 頻度の高い文字は短く、低い文字は長く

$\longrightarrow$ 頻度まで考慮して符号長の期待値を短く

$\cdots$ 頻度 (出現確率) を考慮して
符号効率の定式化を考えている

「情報源 alphabet と頻度との組」
が符号化の対象

情報源符号化の定式化・続

S : 情報源 alphabet(有限集合)

$P : S \longrightarrow [0,1] \subset \boldsymbol{R}$: **生起確率** $\left(\sum_{s \in S} P(s) = 1 \right)$

情報源 $\mathcal{S} := (S, P)$

: 文字 $s \in S$ を確率 $P(s)$ で次々と発生

$\longrightarrow w \in S^+$ を発生

(ここでの) 仮定 : 情報源の無記憶性

> 各 $s \in S$ の生起確率は、s のみで決まり、
> 先立って発生した文字に依らない。

情報源符号化の定式化・続

T : 符号 alphabet(有限集合)
(しばしば $T = \{0, 1\}$)

$\mathcal{C} : S \longrightarrow T^+$: 符号
$\longrightarrow$ 文字列を並べて $\mathcal{C}^* : S^* \longrightarrow T^*$ に延長

$L(\mathcal{C}) := \sum_{s \in S} P(s)|\mathcal{C}(s)|$: $\mathcal{C}$ の平均符号長
(1 文字の符号語長の期待値)

符号への要請

- **一意符号:** $\mathcal{C}^* : S^* \longrightarrow T^*$ **: 単射**

- **瞬時符号:** $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{C}(s)\boldsymbol{w} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = s\boldsymbol{y}$
  (最初に届いた符号語 $\mathcal{C}(s)$ **で**
  最初の文字 s **が復元できる)**

  (以上は生起確率 P **には依らない)**

- **効率が良い** $\cdots$ **平均符号長** $L(\mathcal{C})$ **が小さい**
  (これは生起確率 P **に依る)**

生起確率を考慮に入れて、

平均符号長の小さい符号の構成を考えよう

$\longrightarrow$ **Huffman 符号**

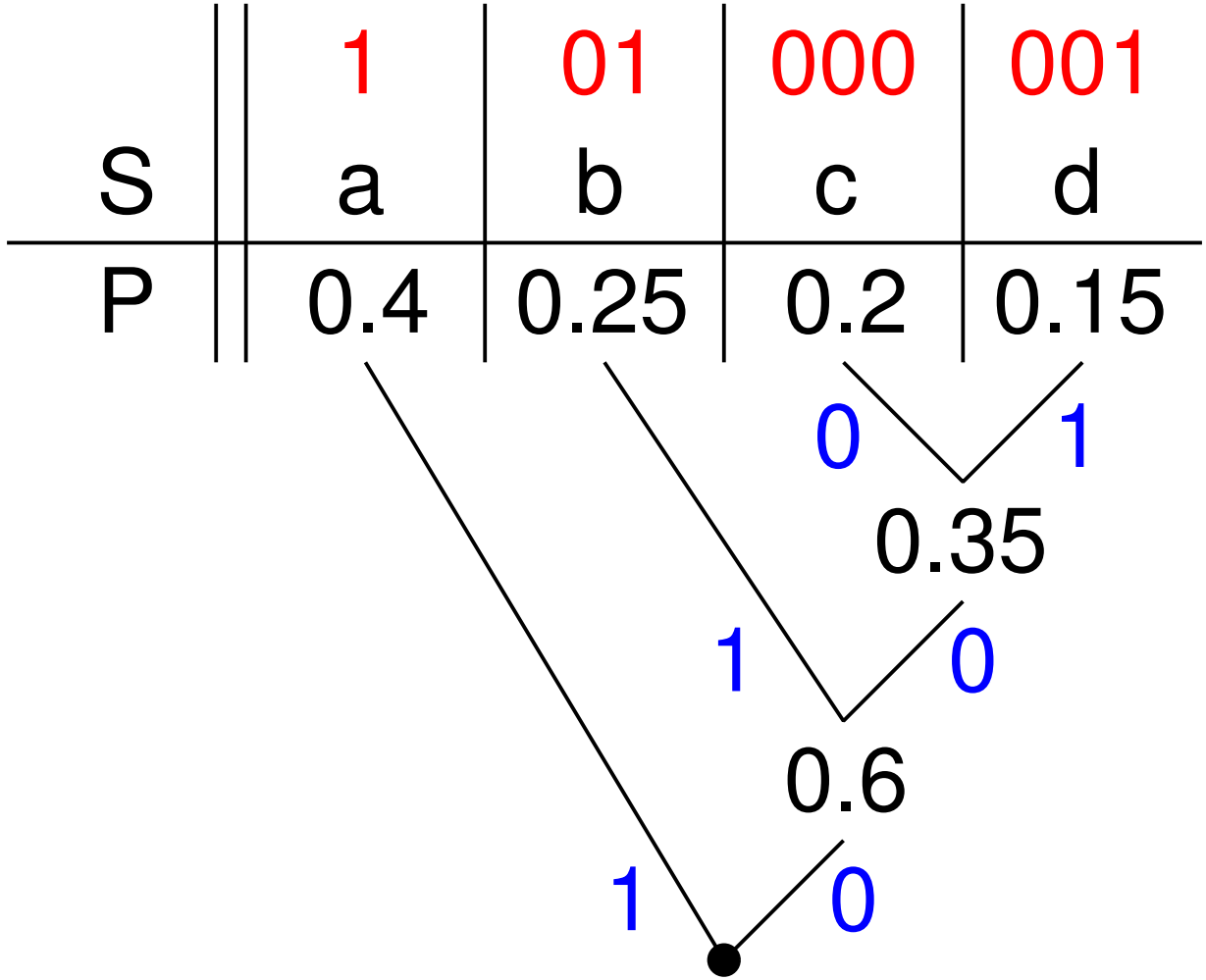
平均符号長の小さい符号の構成 (Huffman 符号)

例: $\#S = 4 = 2^2$, **平均符号長:** $1.95(< 2)$

S	a	b	c	d
P	0.4	0.25	0.2	0.15

平均符号長の小さい符号の構成 (Huffman 符号)

例: $\#S = 4 = 2^2$, **平均符号長:** $1.95(< 2)$



Huffman 符号

- **平均符号長 $L(\mathcal{C})$ の最小値を実現**
  $\cdots$ 最適符号 (optimal code)

- **各文字の生起確率 $P(s)$ の**
  “ばらつき” が大きいほど効果的

- **弱点: 予め生起確率が判らないと**
  符号を構成できない

$\#S = 2$ **だったら、**

どうやっても

(生起確率に関わらず) $L(\mathcal{C}) = 1$ **か？**

(何かうまい手はないか)

$\longrightarrow$ **“拡大情報源”を考える**

$\#S = 2$ **だったら、**

どうやっても

(生起確率に関わらず) $L(\mathcal{C}) = 1$ **か？**

(何かうまい手はないか)

$\longrightarrow$ **“拡大情報源”を考える**

拡大情報源

情報源 $\mathcal{S} = (S, P)$ に対し、

“n 文字づつまとめた情報源” $\mathcal{S}^n$ を考える

$$\mathcal{S}^n := \left(S^n, P^{\otimes n}\right)$$

$$S^n = S \times \cdots \times S = \left\{ s_{i_1} \ldots s_{i_n} \middle| s_{i_j} \in S \right\}$$

$$P^{\otimes n} : S^n \longrightarrow [0,1] \subset \boldsymbol{R}$$

$$s_{i_1} \ldots s_{i_n} \longmapsto P\left(s_{i_1}\right) \cdots P\left(s_{i_n}\right)$$

$\longrightarrow$ この情報源 $\mathcal{S}^n$ を符号化せよ

問題: 次の生起確率を持つ情報源

$\mathcal{S} = (S, P), S = \{a, b\}$ **について、**

S	a	b
P	0.8	0.2

(1) 2 **次の拡大情報源** $\mathcal{S}^2 = (S^2, P^{\otimes 2})$
に対する Huffman 符号 $\mathcal{C}_2$ **を構成し、**
“1 **文字当たりの平均符号長”**
$L(\mathcal{C}_2)/2$ **を求めよ。**

(2) 3 **次の拡大情報源** $\mathcal{S}^3 = (S^3, P^{\otimes 3})$
に対しても同様の計算をせよ。