

# 1. 級数の収束性

## 1-1. 数列・級数・関数の収束.

- 数列  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  が値  $a$  に収束  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |a - a_n| < \varepsilon$
- 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が値  $a$  に収束  $\iff$  部分和の成す数列  $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n=0}^{\infty}$  が  $a$  に収束
- 数列・級数が収束しない時は全て発散というが、特に、  
数列  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  が正の無限大に発散  $\iff \forall M : \exists N : \forall n > N : a_n > M$
- 関数  $f(x)$  が  $x \rightarrow x_0$  で値  $a$  に収束  
 $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$
- 関数  $f(x)$  が  $x \rightarrow +\infty$  で値  $a$  に収束  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists M : \forall x > M : |f(x) - a| < \varepsilon$
- 関数  $f(x)$  が  $x \rightarrow x_0$  で正の無限大に発散  
 $\iff \forall M : \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

## 1-2. 絶対収束.

- (上に) 有界な単調増加数列はその上限に収束する。  
\* 数列  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  が上に有界  $\iff \exists M : \forall n : a_n < M$   
\* 上に有界な数列  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  の上限 (最小上界)  $\sup a_n := \min\{M | \forall n : a_n < M\}$   
(即ち、 $\forall N : a_n < M_0$  かつ  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : a_n > M_0 - \varepsilon$  となる  $M_0$  のこと)
- 正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  はその部分和が(上に)有界ならその上限に収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限值は変わらない(同じ値に収束)。
- 絶対収束する級数は収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限值は変わらない(同じ値に収束)。  
\* 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が絶対収束  $\iff$  級数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  が収束
- 収束するが絶対収束しない級数(条件収束)では、項の順番を入れ換えると、(正負の無限大を含めて)任意の値に収束し得る。
- 交替級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ( $n$ :偶数の時  $a_n > 0$ ,  $n$ :奇数の時  $a_n < 0$ ) は、 $a_n \rightarrow 0$  なら収束する(絶対収束するとは限らない)。

## 1-3. 級数の収束性判定. 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について

- 既知の正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  と比較して  
\* 有限個の  $n$  を除いて  $a_n \leq b_n$  で  $\sum b_n$  : 収束  $\Rightarrow \sum a_n$  : 収束  
\* 有限個の  $n$  を除いて  $a_n \geq b_n$  で  $\sum b_n$  : 発散  $\Rightarrow \sum a_n$  : 発散  
注: 上記の判定法で、  
\* 途中からでも良い ( $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$  などでも可)  
\* 定数倍しても良い ( $\exists C > 0 : a_n \leq Cb_n$  などでも可)
- d'Alembert の判定法 (比テスト)  
\*  $(\exists r < 1$  : 有限個の  $n$  を除いて  $a_{n+1}/a_n \leq r) \Rightarrow \sum a_n$  : 収束  
\*  $a_{n+1}/a_n \rightarrow r (n \rightarrow \infty)$  のとき、  
 $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$  : 収束,  $r > 1 \Rightarrow \sum a_n$  : 発散
- Cauchy の判定法 ( $n$  乗根テスト)  
\*  $(\exists r < 1$  : 有限個の  $n$  を除いて  $\sqrt[n]{a_n} \leq r) \Rightarrow \sum a_n$  : 収束  
\*  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow r (n \rightarrow \infty)$  のとき、  
 $r < 1 \Rightarrow \sum a_n$  : 収束,  $r > 1 \Rightarrow \sum a_n$  : 発散
- 上記の判定法で  $r = 1$  の時はこれだけでは判らない。(より精密な判定法あり。)

## 1-4. 級数の収束・発散の例.

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  は  $|x| < 1$  で絶対収束  $\left( = \frac{1}{1-x} \right)$ 、 $|x| \geq 1$  で発散
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  は  $s > 1$  で(絶対)収束、 $s \leq 1$  で発散
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$  は  $s > 1$  で(絶対)収束、 $s \leq 1$  で発散