2–1. 幂級数の収束性・収束半径.

- 幂級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径** が $r \overset{\leftarrow}{\iff} |x| < r$ で収束、$|x| > r$ で発散
  ($\forall x$ で収束する時は便宜上 $r = \infty$ という。$x = 0$ のみで収束する時は $r = 0$。)
- 収束半径 r の時、$|x| = r$ を**収束円**といい、$|x| < r$ の範囲を**収束円内**という。
- 幂級数はその収束円内で ($r = \infty$ の時は $\forall x$ で) 絶対収束する。$|x| = r$ の時は判らない (いろいろな場合がある)。
- Cauchy の判定法 (n 乗根テスト): $\sqrt[n]{|a_n|} \to s (n \to \infty) \implies$ 収束半径は s^{-1}
- d'Alembert の判定法 (比テスト): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to s (n \to \infty) \implies$ 収束半径は s^{-1}
- 上極限を用いた収束半径の公式: $r = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

2–2. Taylor 展開.

- 何回でも微分できる関数 $f(x)$ の ($x = 0$ を中心とする) **(形式的)Taylor 展開**

$$(\spadesuit) \qquad f(x) \text{ “}=\text{” } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

- **剰余項**: $R_N(x) := f(x) - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$
- 剰余項の評価 (**Taylor の定理**): f が N 階微分可能の時、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

- 証明に使う定理:
  - ⋆ Rolle の定理:
    f: 閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 (a, b) で微分可能、$f(a) = f(b)$
    $\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$
  - ⋆ Cauchy の平均値の定理:
    f, g: 共に 閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 (a, b) で微分可能で
    - ∗ $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
    - ∗ $(f(a), g(a)) \neq (f(b), g(b))$
    $\implies \exists c \in (a, b) : [f(a) - f(b) : g(a) - g(b)] = [f'(c) : g'(c)]$ (比が等しい)
- $N \to \infty$ で $R_N(x) \to 0$ の時、($\spadesuit$) の右辺は収束して本当に $= f(x)$
- 例えば $\exists c : \forall N, 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < c^N$ ならばよい。
- 形式的 Taylor 展開が元の関数に一致しない例 : $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

2–3. 項別微積分.
幂級数で表される関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < r$) について

- $\int_{t=0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ($|x| < r$)
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ($|x| < r$)

特に $f(x)$ は収束円内 $|x| < r$ で何回でも微分可能。

2–4. **二項展開.** $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

- $\displaystyle \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$: **二項係数**
- $\alpha = N \in \boldsymbol{N}$ の時は普通の二項定理 : $\displaystyle (1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n$
- $\alpha \notin \boldsymbol{N}$ の時は本当に無限和で、収束半径 1

2–5. **Landau の o-記号,O-記号.**

- $\displaystyle f(x) = o(g(x))\ (x \to a) \overset{\leftarrow}{\iff} \frac{f(x)}{g(x)} \to 0\ (x \to a)$
  $\iff \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon|g(x)|$
- $f_1(x) = f_2(x) + o(g(x))\ (x \to a) \overset{\leftarrow}{\iff} f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$
- $\displaystyle f(x) = O(g(x))\ (x \to a) \overset{\leftarrow}{\iff} \frac{f(x)}{g(x)}$: 有界 $(x \to a)$
  $\iff \exists C > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < C|g(x)|$
- $x \to +\infty$ 等に対しても同様。
- f が ($x = 0$ の近くで) N 回微分可能ならば、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N + o(x^N) \quad (x \to 0)$$

- 例 :
  - ⋆ $a < b$ に対し $x^b = o(x^a)\ (x \to 0),\quad x^a = o(x^b)\ (x \to +\infty)$
  - ⋆ $\forall a \in \boldsymbol{R}, \varepsilon > 0$ に対し $x^a = o(e^{\varepsilon x})\ (x \to +\infty)$
  - ⋆ $\forall\varepsilon > 0$ に対し $\log x = o(x^\varepsilon)\ (x \to +\infty)$
  - ⋆ $\forall\varepsilon > 0$ に対し $\log x = o(x^{-\varepsilon})\ (x \to +0)$

3. 指数関数とその仲間たち

3–1. **逆三角関数.**

- 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを**逆三角関数**という。
- $y = \sin x\ (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arcsin x\ (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$: **主値**
  (しばしば Arcsin x と書かれる)
- $y = \tan x\ (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arctan x\ (-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$: **主値**
  (しばしば Arctan x と書かれる)
- $\displaystyle (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3–2. **Euler の公式.**

- $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
- $\displaystyle \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$

3–3. **双曲線関数.**

- $\displaystyle \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- 三角関数と類似の公式が多く成立