2009年度春期　数学B(微分積分)　中間試験 (担当:角皆)

実施: 2009年6月15日 (月), 13:30 〜 15:00, 3–325教室

1. 一般的な諸注意

- 以下の要領で期末試験に準じて行なう。
- 学生証を机上に提示すること。
- 入室は試験開始後20分まで認める。退室は試験開始後30分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷 (白色かそれに近いもので無地) ・時計 (電卓機能等のないもの) のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞄の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始まで問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに学生番号・名前を答案用紙に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 答案用紙の2枚目以降が必要な場合は挙手して申し出ること。2枚目以降にも学生番号・名前の記入を忘れずに。また、全ての用紙に何枚目中の何枚目かを記入すること。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案を提出すること。

2. 問題・解答について

- 解答は答案用紙に記述すること。問題番号の順に解答する必要はないが、どこがどの問題か明確に判るようにすること。但し、
  - ⋆ 問1は直観問題であり、◯×のみを解答欄に記入すればよい。
  - ⋆ 問2 (2) は、値を解答欄にも記入すること。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。数式も文であり、答案は文章である。数式のみで充分な場合もあるので、殊更に丁寧過ぎる必要はないが、数式の散漫な羅列ではいけない。必要に応じて、「とする」「となればよい」「したがって」などの言葉を適切に用いて、意図・論理の伝わる答案を心掛けること。

3. 期末試験について

- 期日: 期末試験期間内に行なう予定。
- 範囲: 前期に講義した範囲。中間試験までの範囲も含む。

2009年度春期　数学B(微分積分)　中間試験 (担当:角皆)

問 1. 次の級数は収束するか。収束するなら○を、しないなら×を、解答欄に記せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2009}{n^3}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2009}}{e^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{2009}}{n^2}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos n$

問 2. $f(x) = \cos x$ の Taylor 展開を用いて、$\cos 1$ の近似値を計算したい。

(1) $\cos x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、$|R_N(f; 1)| < 10^{-6}$ となる (なるべく小さい) N を与えよ。

(2) $\cos 1$ の近似値を小数第 5 位まで計算せよ。(値を解答欄にも記入せよ。)

(3) 求めた近似値と真の値との誤差が 10^{-5} 以下であることを保証せよ。

問 3. 関数 $f(x) = x^3$ において、x を 2 に近付けると $f(x)$ は 8 に近付くが、その誤差について、以下の問に答えよ。

(1) $|f(x) - 8| < 10^{-4} = 0.0001$ となるためには、x をどの程度 2 に近付ければ良いか (つまり、$x = 2 + h$ と置くとき、$|h| < \delta$ なら大丈夫と言えるためには、δ の値を幾らに取れば良いか) を考える。

(a) $x = 2 + h$ と置き、$|h| < \delta$ とするとき、δ を用いて誤差 $|f(x) - 8|$ を上から評価せよ。($|f(x) - 8| <$ (δ の式) の形の不等式を求めよ。)

(b) $|f(x) - 8| < 10^{-4} = 0.0001$ となるためには、δ の値を幾らに取れば良いか。ぎりぎりの値でなく、桁が判る程度で構わないが、不等式による評価においては、$\fallingdotseq$ などを用いず、確実に正しいものであること。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2} x^3 = 8$ であることを、ε-δ 流で証明せよ。即ち、任意の正の数 ε に対して、或る正の数 δ が存在して、$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 8| < \varepsilon$ となることを、ε に応じて δ を与えることによって示せ。

問 4. 次の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

問 5. Taylor 展開を利用して、次の $x \to 0$ での極限値を求めよ。

(1) $\dfrac{\log(1 - 2x) + 2x + 2x^2}{x^3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt[3]{1 + x}}{x}$　(3) $\dfrac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$

問 6. $\tan x$ の Taylor 展開を x^7 の項まで求めよ。

以上

TAYLOR 展開の例

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$