

2009 年度春期

数学 B(微分積分)

(物質生命理工学科1クラス)

↑ クラス分けに注意

(担当: 角皆)

数学の分野 (手法)	解析学 (無限小解析)	代数学
理工学の 大学初年級 では	微分積分	線型代数
本学 理工学部 1年次 では	数学 B(微分積分) 微分方程式の基礎 ベクトル解析の基礎	数学 A (線型代数)
標語的には	不等式の数学	等式の数学

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

例: 2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x - 2)(x - 5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例: 2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、
動作は等式の扱いと同様であった

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか？

収束・発散・極限などなど、

それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

と言っても難しいことではない。

使うことはこの程度。

- 推移律: $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$
- 演算との関係:
 - ★ $x \leq y \implies x + a \leq y + a$
 - ★ $a > 0, x \leq y \implies ax \leq ay$
- 三角不等式: $|x + y| \leq |x| + |y|$

問 1:

縦が大体 3cm、横が大体 5cm の
長方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が 0.1cm^2 未満

であることを保証するためには、
縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

真の縦の長さを x cm、

真の横の長さを y cm としよう。

この時、面積の誤差は $|xy - 15|\text{cm}^2$ と表せる。

$x = 3 + h, y = 5 + k$ とおくと、

h, k がそれぞれ縦横の誤差である。

誤差が δ cm 未満とすると、

$$0 \leq |h| < \delta, \quad 0 \leq |k| < \delta.$$

設定:

$$\begin{cases} x = 3 + h, & 0 \leq |h| < \delta \\ y = 5 + k, & 0 \leq |k| < \delta \end{cases}$$

目標:

$$|h| < \delta, |k| < \delta \implies |xy - 15| < 0.1$$

となる δ を見付けること

目標: $|h| < \delta, |k| < \delta \implies |xy - 15| < 0.1$
となる δ を見付けること

- δ は 1 つ見付ければ良い
- 余り小さ過ぎない方が良い
- 余りぎりぎりでも良い
→ 桁くらい判れば良いだろう
- 論理的には厳密であること (≠ ではなくて)
- 誤差の限界 (今は 0.1) が小さくなっても
通用する方法が良い

$$0 \leq |h| < \delta, \quad 0 \leq |k| < \delta$$

$$\begin{aligned} |(3+h)(5+k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\ &\leq 5|h| + 3|k| + |h||k| \\ &< 5\delta + 3\delta + \delta^2 \\ &= 8\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、

$$8\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

となれば良い。

2次不等式

$$8\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

を解くのは大変だ

しかし、

- 誤差の限界 δ が大きい時は興味がない
- ぎりぎりを狙う必要はない

→ 例えば

$\delta < 1$ という条件付きで考えれば良い。

そこで、

$$\delta \leq 1$$

とする。すると、

$$\begin{aligned} 8\delta + \delta^2 &\leq 8\delta + \delta \\ &= 9\delta \\ &< 10\delta \end{aligned}$$

であるから、

$$10\delta \leq 0.1$$

となれば良い。

これより、

$$\delta \leq \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した

$$\delta \leq 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は

0.01cm 未満

であれば良い。

さっき $\delta \leq 1$ とした後に、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + 1$$

とすることも出来た
(ここだけ見るなら論理的には正しい)。

しかし、これだと

$$8\delta + 1 \leq 0.1$$

としなければならなくなってしまい困る。

→ 目標を見定めて議論を進める必要性

(技術的な細かい話)

もう少し厳しく、

$$\delta \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

としておけば、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \frac{1}{100}$$

なので、

$$8\delta + \frac{1}{100} \leq 0.1$$

であれば良い。

このような δ なら取ることが出来る。

(技術的な細かい話)

しかし、この論法のためには、

0.1 だったらどれくらいにすれば良いか、
かなり注意深く取っておかないと破綻する
(本末転倒)

さっきのように、 $\delta \leq 1$ の下で、

$$\delta^2 \leq \delta$$

で評価しておけば、

誤差の限界が小さくなっても、

後で δ を小さくとれば対応できる

(技術的な細かい話)

勿論、

もっと精密な限界が知りたければ / 必要ならば、

2次不等式

$$8\delta + \delta^2 \leq 1$$

を解くなり、もっと精密な評価をするなり
すればよい / せねばならない。

今までは、
誤差の限界が 0.1cm^2 に設定されていて、
その値以内に収めようとしてきたが、

この場合、原理的には、
どんなに厳しい(小さい)限界に対しても、
同様の議論が可能

→ 誤差の限界が 0.001cm^2 だったら？

→ より一般に、
誤差の限界を εcm^2 とすると？

これはどういうことかと言うと、

h, k が充分 0 に近ければ、

$(3 + h)(5 + k)$ は充分 $3 \cdot 5 = 15$ に近い
ということを行っている。

これが

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (3 + h)(5 + k) = 15$$

或は

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった !!