前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

など

問 1**:**

縦が大体 $3\mathrm{cm}$**、横が大体** $5\mathrm{cm}$ **の長方形の紙がある。**

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\mathrm{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が $0.1\mathrm{cm}^2$ **未満**

であることを保証するためには、
縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

真の縦の長さを $(3+h)$ cm**、**
真の横の長さを $(5+k)$ cm**、**
誤差が δ cm **未満とすると、**

$$0 \leq |h| < \delta, \qquad 0 \leq |k| < \delta.$$

$$\begin{aligned} |(3+h)(5+k)-15| &= |5h+3k+hk| \\ &\leq 5|h|+3|k|+|h||k| \\ &< 8\delta+\delta^2. \end{aligned}$$

従って、$8\delta+\delta^2 \leq 0.1$ **となれば良い。**

ここで、(例えば) $\delta \leq 1$ とする。すると、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \delta < 10\delta$$

であるから、$10\delta \leq 0.1$ となれば良い。これより

$$\delta \leq \frac{1}{100} = 0.01$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta \leq 1$ とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は

$0.01\mathrm{cm}$ 未満

であれば良い。(以上復習)

さて、

(詳しく見るために) 少し問題を単純にして、

問 2**:**

一辺が大体 $3\mathrm{cm}$ **の正方形**

(従って面積は大体 $9\mathrm{cm}^2$**) で、**

面積の誤差を $0.1\mathrm{cm}^2$ **未満にしたければ、**

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、

一辺の長さは縦横ともに $(3+h)\ \mathrm{cm}$ **とし、**

誤差は $\delta\ \mathrm{cm}$ **未満 (つまり** $|h|<\delta$**) としよう。**

$$\begin{aligned} |(3+h)^2-9| &= |6h+h^2| \\ &\leq 6|h|+|h|^2 \\ &< 6\delta+\delta^2 \end{aligned}$$

この後は前回のように $\cdots\cdots$

問 $2'$**:**

関数 $f(x) = x^2$ **において、**

x **を** 3 **に近付けると** $f(x)$ **は** 9 **に近付くようだが、**

その誤差について、

$$|f(x) - 9| < 0.1$$

となるためには、

x **をどの程度** 3 **に近付ければ良いか?**

($|x-3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 9| < 0.1$ **となるには、** δ **の値をどれくらいにすれば良いか?)**

($x = 3 + h$ **と置くと判り易い)**

ここでは、誤差の限界を設定して、

その値以内に収めようとしてきたが、

今の場合、原理的には、

どんなに厳しい限界に対しても、

同様の議論が可能。

$\longrightarrow$ **誤差の限界が** $0.0001\mathrm{cm}^2$ **だったら？**

$\longrightarrow$ **より一般に、**
誤差の限界を $\varepsilon\ \mathrm{cm}^2$ **とすると？**

これは何をやっているかと言うと、

h が充分 0 に近ければ、$(3+h)^2$ は充分 9 に近い

ということを言っている。

x が充分 3 に近ければ、x^2 は充分 9 に近い

と言っても良い。

これが

$$\lim_{h \to 0} (3+h)^2 = 9$$

或は

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

どんな (小さな) 正の実数 ε に対しても、
或る (都合の良い) 正の実数 δ が存在して、

$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \\ &\qquad\qquad 0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon \end{aligned}$$

この流儀で $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ を定式化 (定義) すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε-δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$(\lim_{x\to a} f(x) = b)$$

ということを、次で定義する:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の極限の定義

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} f(x) = b \\
&\quad \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \\
&\qquad\qquad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)
\end{aligned}
$$

この定義の下で、例えば次のことが証明出来る:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} f(x) = b, \lim_{x \to a} g(x) = c \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c
\end{aligned}
$$

話は変わって、次の題材 (お話だけ)

問 3:

或る実験での測定値が大体 a くらいで、

誤差 (の絶対値) は δ 未満だという。

この実験を 10 回行なって、

測定値の平均を取ったら、

誤差はどれ程と言えるか。

各回の測定値を a_i **とし、誤差が** x_i **とせよ。**
($i = 1, \ldots, 10$**)**

$$|a_i - a| = |x_i| < \delta,$$

従って、

$$a - \delta < a_i < a + \delta.$$

$i = 1, \ldots, 10$ **について辺々加えて、**

$$10(a - \delta) < \sum_{i=1}^{10} a_i < 10(a + \delta)$$

これより、

$$a - \delta < \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} < a + \delta$$

従って、

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{10} - a \right| < \delta$$

$\longrightarrow 10$ **回測定しても誤差は同じ？**

実際には、

誤差がランダムに出るとすれば、

打ち消し合って精度が上がるであろう。

- **統計学の問題 ($\longrightarrow$「数学C(確率統計)」)**
- **実験学・測定技術の問題**

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう。

極限

良く判らないものを、良く判るもので近似する

無限	$\longleftrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longleftrightarrow$	**離散量** **(digital)**