

## (形式的) Taylor 展開

$$f(x) \text{ “=” } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

## 二項展開 ( $a$ は任意の実数で可)

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\ &= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

: 二項係数 (**binomial coefficient**)

## 無限等比級数の和

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\text{収束} \iff |rx| < 1$$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

(この例は念頭に置いておこう)

## 無限等比級数の和

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\text{収束} \iff |rx| < 1$$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

(この例は念頭に置いておこう)

## 指数関数・対数関数

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

## 三角関数

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\end{aligned}$$

問題:

(1)  $f(x) = \sin x$  の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、

(a) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$  を求めよ。

(b)  $\sin 1$  の近似値を小数第 4 位まで求めよ。

## (形式的)Taylor 展開の計算

高階微分  $f^{(n)}(x)$  の直接計算が難しい場合:

- 既知の公式から (等比級数の和など)
- 既知の展開に代入
- 既知の展開から四則演算で
- 既知の展開から項別微積分で



## (形式的) Taylor 展開の計算

例題:

$$(1) e^{-x^2} = \exp(-x^2)$$

$$(2) e^x \cos x$$

$$(3) \frac{1}{1+x-x^3}$$

$$(4) -\log(1-x)$$

## (形式的) Taylor 展開の計算

演習問題:

次の関数の Taylor 展開を  $x^4$  の項まで求めよ

$$(1) e^{x+x^2} = \exp(x + x^2)$$

$$(2) \frac{1}{1 - x - x^2}$$

## Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$  の近くでの様子が判る
  - ★ 近似値の計算
  - ★  $x \rightarrow 0$  の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

## Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

## 問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を  
やってよいか？

## 今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

## 今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

## 例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

### 例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{8} + \dots$$

---

$$\frac{1}{2}S = 1 \quad +\frac{1}{3} \quad +\frac{1}{5} \quad +\frac{1}{7} \quad +\dots$$



## 例：調和級数

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

⇓

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots??$$

## 例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

---

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots??$$

## 例：調和級数

実は、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

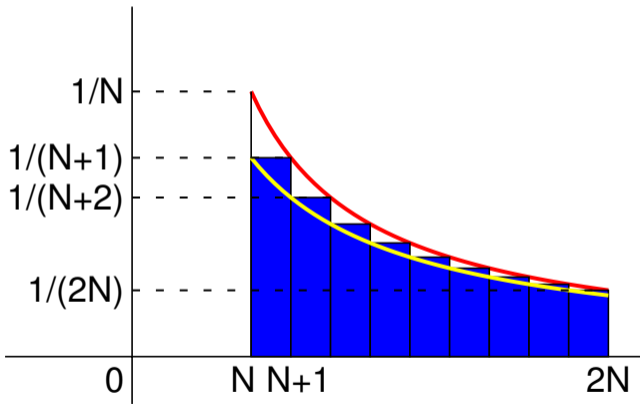
は収束するが、

$$T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots < 1$$

より  $\frac{1}{2} < T < 1$  (実は  $T = \log 2 \doteq 0.693$ )

## 例：調和級数



## 例: 調和級数

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \dots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) + \dots < \frac{4}{3}$$

より  $1 < T < \frac{4}{3}$  (実は  $T = \frac{3}{2} \log 2 \doteq 1.040$ )

## 例：調和級数

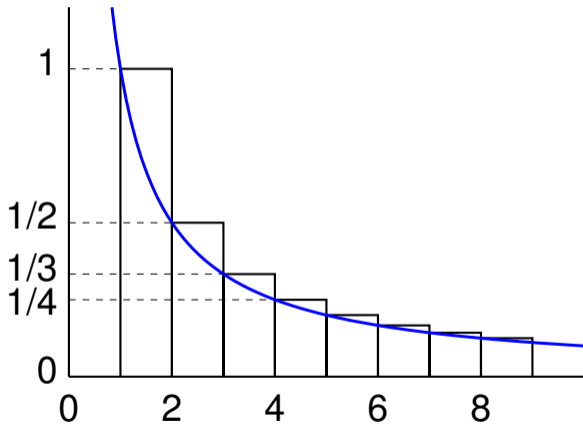
このような 奇怪 な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

が発散することにある：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \quad !!$$

## 例：調和級数



実数列  $(a_n)$  に対し、

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ = \max\{a_n, 0\},$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ = \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}$$

とおく



例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

---

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum |a_n| : \text{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束}$$
$$\implies \sum a_n : \text{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$$\sum |a_n| : \text{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束}$$
$$\implies \sum a_n : \text{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$  : 共に収束 (即ち、 $\sum |a_n|$  : 収束) の時、

「絶対収束 (**absolutely convergent**)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ... 正項級数の収束判定

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$  : 共に収束しない  
(即ち、 $\sum |a_n|$  : 収束しない) が、

$\sum a_n$  は収束する時、

「条件収束 (conditionally convergent)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$  に発散させることも、
- $-\infty$  に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る。

## 正項級数の収束判定

$$\begin{aligned} \text{部分和: } S_N &= \sum_{n=0}^N a_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \end{aligned}$$

正項級数 ( $a_n > 0$ )

$\iff$  部分和  $S_N$  が単調増加

$\longrightarrow$  単調増加数列の収束判定へ