(形式的)Taylor 展開

$$f(x) \text{ ``}=\text{''} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

二項展開 (a は任意の実数で可)

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$
$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

: 二項係数 (binomial coefficient)

無限等比級数の和

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n$$
$$= 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \cdots$$

$$\textbf{収束} \iff |rx| < 1$$
$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

(この例は念頭に置いておこう)

指数関数・対数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

三角関数

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

問題:

(1) $f(x) = \sin x$ **の Taylor 展開を求めよ。**

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$ **を求めよ。**

(b) $\sin 1$ **の近似値を小数第** 4 **位まで求めよ。**

(形式的)Taylor 展開の計算

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合:

- **既知の公式から (等比級数の和など)**
- **既知の展開に代入**
- **既知の展開から四則演算で**
- **既知の展開から項別微積分で**

(形式的)Taylor 展開の計算

例題:

(1) $e^{-x^2} = \exp(-x^2)$

(2) $e^x \cos x$

(3) $\dfrac{1}{1+x-x^3}$

(4) $-\log(1-x)$

(形式的)Taylor 展開の計算

演習問題:

次の関数の Taylor 展開を x^4 の項まで求めよ

(1) $e^{x+x^2} = \exp(x + x^2)$

(2) $\dfrac{1}{1 - x - x^2}$

Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ **の近くでの様子が判る**
  - $\star$ **近似値の計算**
  - $\star$ $x \to 0$ **の極限の様子**
- **統一的・一意的表示**
- **良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)**

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
  やってよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

例: 調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

例: 調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}S = \quad - \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad - \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = 1 \qquad + \frac{1}{3} \qquad + \frac{1}{5} \qquad + \frac{1}{7} \qquad + \cdots$$

例: 調和級数

$$\frac{1}{2}S = \ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots ??$$

例: 調和級数

$$
\begin{array}{rcl}
S &=& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\
-\frac{1}{2}S &=& \quad - \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad - \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} + \cdots \\
-\frac{1}{2}S &=& \quad - \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad - \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} + \cdots \\
\hline
0 &=& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots ??
\end{array}
$$

例: 調和級数

実は、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

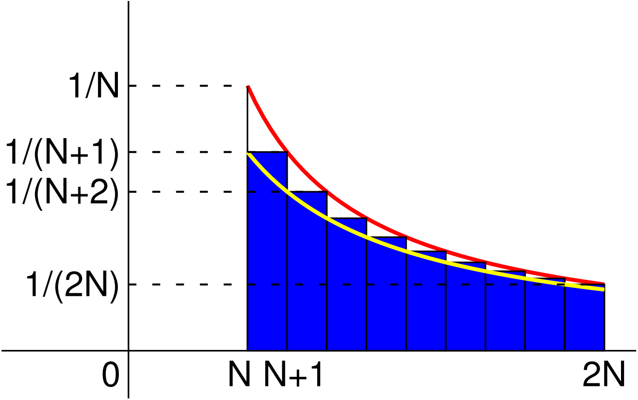
は収束するが、

$$T = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \cdots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ **(実は** $T = \log 2 \fallingdotseq 0.693$**)**

例: 調和級数



例: 調和級数

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}) + \cdots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}) + \cdots < \frac{4}{3}$$

より $1 < T < \frac{4}{3}$ **(実は** $T = \frac{3}{2}\log 2 \fallingdotseq 1.040$**)**

例: 調和級数

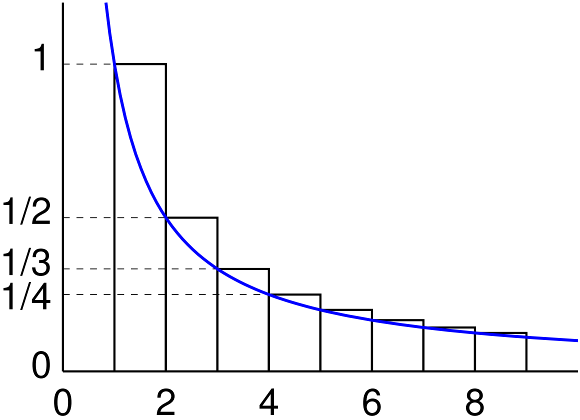
このような 奇怪 な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

が発散することにある:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty \quad \textbf{!!}$$

例：調和級数



実数列 (a_n) **に対し、**

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}$$
$$= \max\{a_n, 0\},$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$
$$= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}$$

とおく

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = (1, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \ldots)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = (0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \ldots)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum |a_n| : \textbf{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \textbf{共に収束}$$

$$\implies \sum a_n : \textbf{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$ ： 共に収束 (即ち、$\sum |a_n|$ ： 収束) の時、

「**絶対収束 (absolutely convergent)**」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 … 正項級数の収束判定

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$ ：共に収束しない
(即ち、$\sum |a_n|$ ：収束しない) が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「条件収束 (conditionally convergent)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る。

正項級数の収束判定

部分和: $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$**)**

$\Longleftrightarrow$ **部分和** S_N **が単調増加**

$\longrightarrow$ **単調増加数列の収束判定へ**