前回の演習の答案へのコメント

- $\sum$ で無理に書く必要はない
  (が書いてみるのも良い)
  - $\star$ $n = 0, 1$ 辺りで確認を
  - $\star$ 感覚の行き来が重要
- $=$ は「両辺が等しい」ことを表す記号
  - $\star$ 「式変形」の記号ではない!!
- $\sin 1$ の近似値
  - $\star$ どこまでとれば大丈夫？
  - $\star$ 必要・意味のある桁と
    不要・意味のない桁との見極めが重要

(形式的)Taylor 展開の計算

演習問題:

次の関数の Taylor 展開を x^4 の項まで求めよ

(1) $e^{x+x^2} = \exp(x + x^2)$

(2) $\dfrac{1}{1 - x - x^2}$

Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
  - ⋆ 近似値の計算
  - ⋆ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
  やってよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

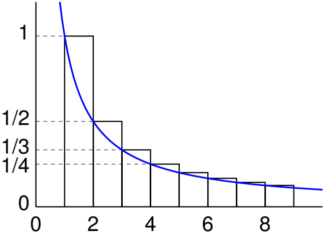
例: 調和級数

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

は 発散する

例: 調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$$
$$>\int_1^{N+1}\frac{dx}{x}=\log(N+1)\to+\infty\ (N\to\infty)$$



例: 調和級数

ところが、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

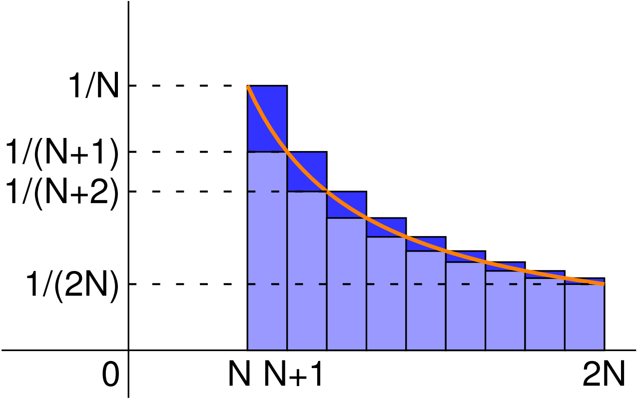
は収束する:

$$T = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \cdots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ **(実は** $T = \log 2 \fallingdotseq 0.693$**)**

例: 調和級数



実数列 (a_n) **に対し、**

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}$$
$$= \max\{a_n, 0\},$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$
$$= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}$$

とおく

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = (1, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \dots)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = (0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \dots)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum |a_n| : \textbf{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \textbf{共に収束}$$

$$\implies \sum a_n : \textbf{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$ ： **共に収束 (即ち、$\sum |a_n|$ ： 収束) の時、**

「絶対収束 (absolutely convergent)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ⋯ 正項級数の収束判定

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$: **共に収束しない**

(即ち、$\sum |a_n|$: 収束しない) が、

$\sum a_n$ **は収束する時、**

「条件収束 (conditionally convergent)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- **任意の実数値に収束させることも、**
- $+\infty$ **に発散させることも、**
- $-\infty$ **に発散させることも、**
- **どれでもないようにさせることも、**

出来る。

正項級数の収束判定

部分和: $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$**)**

$\iff$ **部分和** S_N **が単調増加**

$\longrightarrow$ **単調増加数列の収束判定へ**

(ここまで復習)

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する: $s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する: $s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

"幾らでも大きくなる"

"どんな値よりも大きくなる"

"どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい"

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する: $s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する: $s_n \longrightarrow +\infty$」
とは ?

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する: $s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **については、**

$n \longrightarrow \infty$ **のとき** $a_n \longrightarrow +\infty$

とは、

"どんな値 M **に対しても**

どこかの番号 n_0 **について**

それより先の番号 $n > n_0$ **で**

常に s_n **の方が大きい"**

$$\boxed{\forall M : \exists n_0 : \forall n : (n > n_0 \Longrightarrow a_n > M)}$$

数列の収束・発散

数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$n \longrightarrow \infty$ **のとき** $a_n \longrightarrow a$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **が** a **に収束)**

とは、

“どんな (小さな) 正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対しても**
どこかの番号 n_0 **について**
それより先の番号 $n > n_0$ **で**
常に誤差 $|a_n - a|$ **が** ε **未満”**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n : (n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon)}$$

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が

「$\forall M : \exists n : s_n > M$」

となったら $+\infty$ に発散

収束する為には

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

M : 数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ の**上界** (**upper bound**)

上界が存在する数列を

上に有界 (**bounded above**) という

定理

- 単調増加数列が収束 $\iff$ 上に有界
- 正項級数が収束 $\iff$ 部分和が有界

即ち、$\forall n : a_n \geq 0$ の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$$

しかも、

- 極限値は部分和の最小上界 (上限)
- 部分和は "飛び飛びの和" も考えても同じ
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限値は部分和の最小上界 (上限)
(least upper bound, supremum)

$$M_0 := \min \left\{ M \,\middle|\, \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \,\middle|\, N = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = M_0.$$

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\Longrightarrow \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\Longrightarrow \sum b_n$: 発散

- 途中からでも良い
  ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)
- 定数倍しても良い
  ($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\Longrightarrow \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\Longrightarrow \sum b_n$: 発散

- 途中からでも良い
(${\exists}N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)
- 定数倍しても良い
($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\Longrightarrow \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\Longrightarrow \sum b_n$: 発散

  - 途中からでも良い
    ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)
  - 定数倍しても良い
    ($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から "隣との比" r を取り出すには？

- **漸化式:** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ 一般の数列 (a_n) に対しても、
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら
振舞は同様だろう

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から "隣との比" r を取り出すには？

- **漸化式:** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ 一般の数列 (a_n) に対しても、
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら
振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \textbf{収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\textbf{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \text{収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**