

前回の演習の答案へのコメント

- \sum で無理に書く必要はない
(が書いてみるのも良い)
 - ★ $n = 0, 1$ 辺りで確認を
 - ★ 感覚の行き来が重要
- $=$ は「両辺が等しい」ことを表す記号
 - ★ 「式変形」の記号ではない!!
- $\sin 1$ の近似値
 - ★ どこまでとれば大丈夫？
 - ★ 必要・意味のある桁と
不要・意味のない桁との見極めが重要

(形式的)Taylor 展開の計算

演習問題:

次の関数の Taylor 展開を x^4 の項まで求めよ

$$(1) e^{x+x^2} = \exp(x + x^2)$$

$$(2) \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ の近くでの様子が判る
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く判らない関数の色々な性質が判る (かも)

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
やってよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理” (誤差項の評価)
- 項別微積分

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

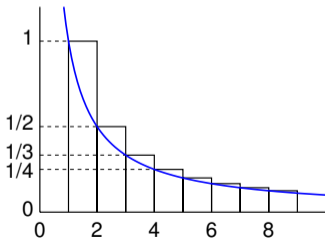
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

は 発散する

例: 調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



例: 調和級数

ところが、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

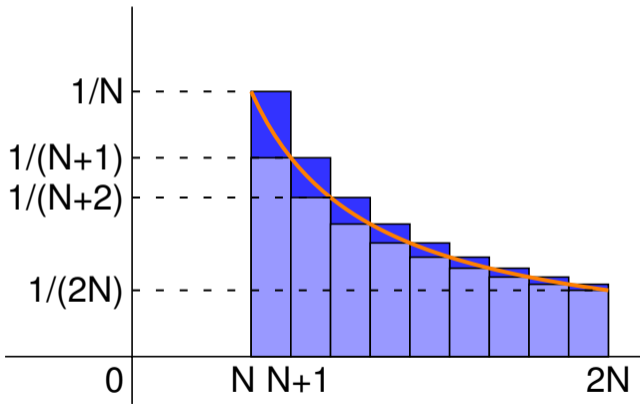
は収束する:

$$T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ (実は $T = \log 2 \doteq 0.693$)

例：調和級数



実数列 (a_n) に対し、

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ = \max\{a_n, 0\},$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ = \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}$$

とおく

例:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum |a_n| : \text{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束}$$
$$\implies \sum a_n : \text{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$: 共に収束 (即ち、 $\sum |a_n|$: 収束) の時、

「絶対収束 (**absolutely convergent**)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ... 正項級数の収束判定

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$: 共に収束しない
(即ち、 $\sum |a_n|$: 収束しない) が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「条件収束 (conditionally convergent)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る。

正項級数の収束判定

部分和: $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$)

\iff 部分和 S_N が単調増加

→ 単調増加数列の収束判定へ

(ここまで復習)

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する: $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな値よりも大きくなる”

“どんな値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、

$n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n \longrightarrow +\infty$

とは、

“どんな値 M に対しても

どこかの番号 n_0 について

それより先の番号 $n > n_0$ で

常に s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n_0 : \forall n : (n > n_0 \implies a_n > M)$$

数列の収束・発散

数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n \longrightarrow a$
(($a_n)_{n=0}^{\infty}$ が a に収束)

とは、

“どんな (小さな) 正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても
どこかの番号 n_0 について

それより先の番号 $n > n_0$ で

常に誤差 $|a_n - a|$ が ε 未満”

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n : (n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon)$$

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が

$$\lceil \forall M : \exists n : s_n > M \rceil$$

となったら $+\infty$ に発散

収束する為には

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

M : 数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ の上界 (upper bound)

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

定理

- 単調増加数列が収束 \iff 上に有界
- 正項級数が収束 \iff 部分和が有界

即ち、 $\forall n : a_n \geq 0$ の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

しかも、

- 極限值は部分和の**最小上界 (上限)**
- 部分和は“飛び飛びの和”も考えても同じ
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限值は部分和の最小上界 (上限)
(least upper bound, **supremum**)

$$M_0 := \min \left\{ M \mid \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

とするととき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = M_0.$$

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\implies \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\implies \sum b_n$: 発散

• 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

• 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から“隣との比” r を取り出すには？

● 漸化式: $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

● 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、
 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$$\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散