

中間試験のお知らせ

6月15日(月) 13:30 ~ 15:00

3-325 教室 (ここ) の予定

- Taylor 展開を巡る諸々
(前の週 (6/8) の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

定理

- 単調増加数列が収束 \iff 上に有界
- 正項級数が収束 \iff 部分和が有界

即ち、 $\forall n : a_n \geq 0$ の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

しかも、

- 極限值は部分和の最小上界 (上限)
- 部分和は“飛び飛びの和”も考えても同じ
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限值は部分和の最小上界 (上限)
(least upper bound, **supremum**)

$$M_0 := \min \left\{ M \mid \forall N : \sum_{n=0}^N a_n \leq M \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

とするととき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = M_0.$$

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n$: 収束 $\implies \sum a_n$: 収束
- $\sum a_n$: 発散 $\implies \sum b_n$: 発散

• 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

• 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq Cb_n$ でも可

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から“隣との比” r を取り出すには？

● 漸化式: $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

● 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、
 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$$\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

演習問題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbf{R}$ に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

で、 $r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

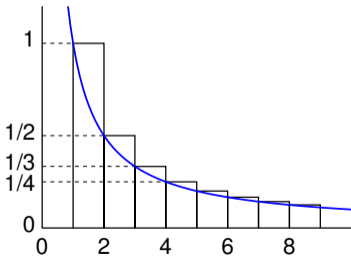
であっても、収束するとは限らない !!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

例：調和級数

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} \\ &= \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)\end{aligned}$$



実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

(s の関数を定めている)

… **Riemann のゼータ関数**

“Millenium Prize” の 7 つの問題の 1 つは、
この $\zeta(s)$ の性質に関すること
(Riemann 予想)

→ 素数分布などに関連

Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

Euler (18 世紀) :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

⋮

$$\zeta(2m) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

- $\zeta(3)$: 有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$ 達の中に無理数が無限個
(Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ の中の
少なくとも 1 つは無理数
(Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の中の
少なくとも 1 つは無理数
(Zudilin, 2003)

→ これらの値 (特殊値) の数論的性質は
現在でも大きな研究テーマ

本題に戻ろう

冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が収束する x の範囲は？

比テスト:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$ 収束
- $|x| > s^{-1} \implies$ 発散

n 乗根テスト:

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$ 収束
- $|x| > s^{-1} \implies$ 発散

s^{-1} : 収束半径

収束半径

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
 $\implies |x| < |x_0|$ で絶対収束

$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$
: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散
- 全ての实数 x に対し収束 $\dots r = \infty$
- $x = 0$ でしか収束しない $\dots r = 0$