

中間試験は鋭意採点中

次回返却の予定

今日は 幕間 (**intermission**)

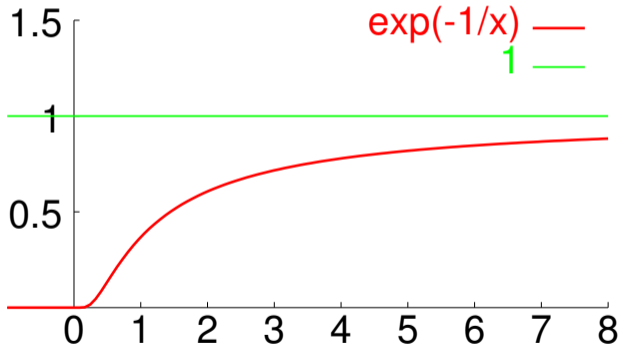
その前にちょっと補足

## Taylor 展開の問題点

(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を  
行なってよいか？

形式的 Taylor 展開が収束しても、  
元の関数と一致しない例



形式的 Taylor 展開が収束しても、  
元の関数と一致しない例

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論  $x > 0$  では  $f(x) \neq 0$

さてさて、幕間のお話

何処に辿り着くやら、お楽しみ

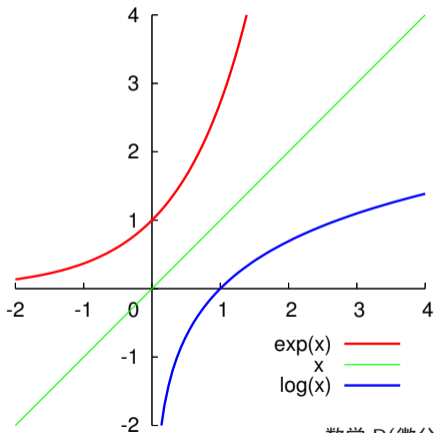
## 指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \iff x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$

$$\exp(\log x) = x$$

## 指数関数・対数関数は互いに逆関数



指数関数:

$y = \exp x$  は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数:

$y = \log x$  は積分表示

$$y = \int_{t=1}^x \frac{dt}{t}$$

を持つ。

→ 実はこれは表裏一体



三角関数  $y = \sin x$  で同様に考えよう

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

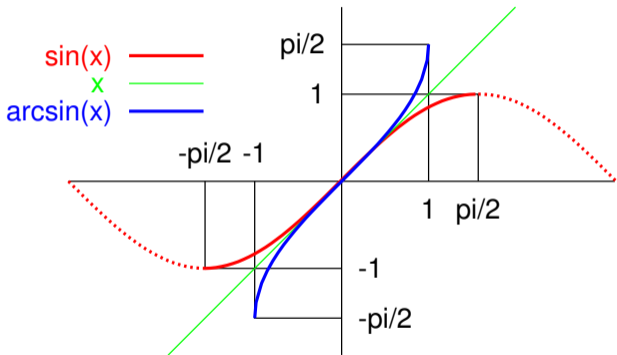
なので、次の微分方程式を満たす:

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

$y = \sin x$  の逆関数  $y = \arcsin x$



## $y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

## $y = \arcsin x$ の積分表示

通常  $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  と書いてしまうが、

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$  のとき、

$\arcsin 0 = 0$  (即ち  $\sin 0 = 0$ ) だから、

積分の下端は  $0$  で良い。

## $y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_{t=0}^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}\end{aligned}$$

## $y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

$$(|x| < 1)$$

$y = \sin x$  の逆関数  $y = \arcsin x$

- 定義域:  $-1 \leq x \leq 1$
- 値域:  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  (主値)
- 積分表示:  $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

## 演習問題

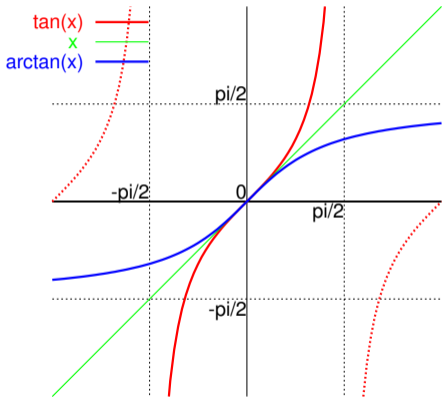
$\arcsin$  の時の真似をして、次の手順で

$y = \arctan x$  の **Taylor** 展開を求めよ

- (1)  $x = \tan y$  の満たす微分方程式を求める
- (2)  $\arctan x$  を積分で表す
- (3) 被積分関数を **Taylor** 展開し項別積分する



$y = \tan x$  の逆関数  $y = \arctan x$



$y = \tan x$  の逆関数  $y = \arctan x$

- 定義域: 全実数  $x$
- 値域:  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  (主値)
- 積分表示:  $\arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$