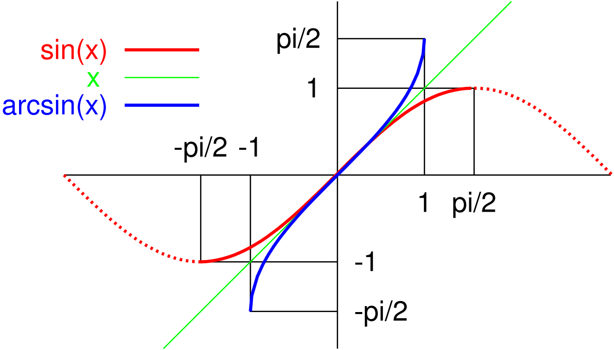
$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- **定義域:** $-1 \leq x \leq 1$
- **値域:** $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ **(主値)**
- **積分表示:** $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \ dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \ dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

$$(|x| < 1)$$

演習問題

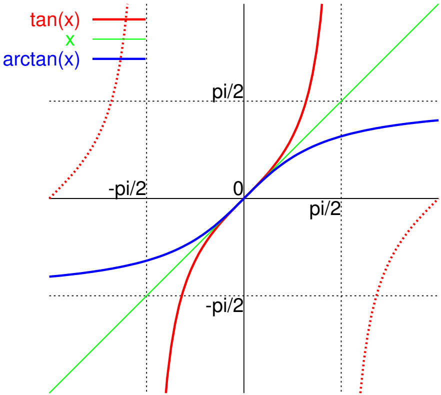
$\arcsin$ の時の真似をして、次の手順で $y = \arctan x$ の Taylor 展開を求めよ

(1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める

(2) $\arctan x$ を積分で表す

(3) 被積分関数を Taylor 展開し項別積分する

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- **定義域: 全実数** x
- **値域:** $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ **(主値)**
- **積分表示:** $\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、
別に不思議はないが、

$\arctan x$ は全実数に対して定義できて、
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、
別に不思議はないが、

$\arctan x$ は全実数に対して定義できて、
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

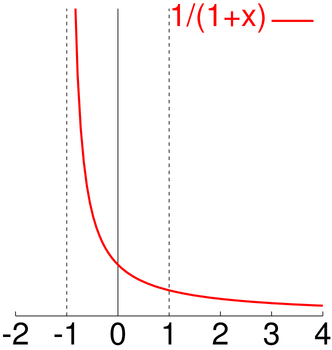
ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、
別に不思議はないが、

$\arctan x$ は全実数に対して定義できて、
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

例: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$



$x = -1$ **で分母が** $0 \longrightarrow$ **元々そこまで**

実は、複素数まで拡げて考えると、
$\arctan x$ の正体が顕れる!!

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ は $t = \pm i$ で分母が 0 !!

やはり $|x| = 1$ の所に越えられぬ障害があった
($|\pm i| = 1$)

実は、複素数まで拡げて考えると、

$\arctan x$ **の正体が顕れる!!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり $|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった**

($|\pm i| = 1$**)**

実は、複素数まで拡げて考えると、
$\arctan x$ の正体が顕れる!!

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ は $t = \pm i$ で分母が 0 !!

やはり $|x| = 1$ の所に越えられぬ障害があった
($| \pm i| = 1$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ

x が複素数の場合も、e^x を右辺の級数で定義してしまおう!!

($\longrightarrow$ 詳しくは「複素関数論」で)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ

x が複素数の場合も、e^x を右辺の級数で定義してしまおう!!

($\longrightarrow$ 詳しくは「複素関数論」で)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ

x が複素数の場合も、e^x を右辺の級数で定義してしまおう!!

($\longrightarrow$ 詳しくは「複素関数論」で)

試しに、

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\
&\qquad + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

Euler の公式： $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

試しに、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\ &\qquad + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Euler の公式：}\ e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$
$$\Downarrow$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

これを使うと、

三角関数の諸性質は指数関数の性質に帰着!!

加法定理 $\longleftarrow$ **指数法則**

双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

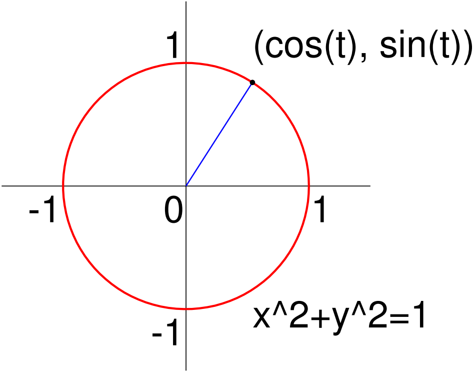
- 三角関数と類似の性質を持つ
- 自然現象の記述にも現れる

双曲線関数

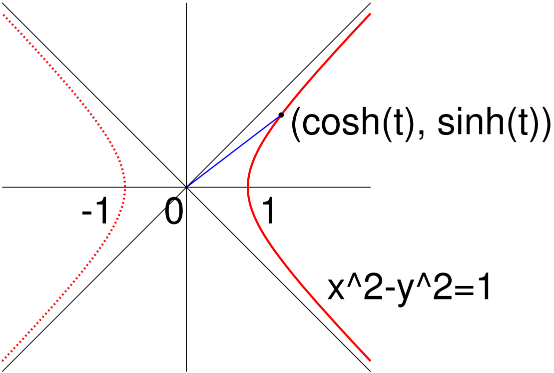
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **三角関数と類似の性質を持つ**
- **自然現象の記述にも現れる**

$x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cos t, \sin t)$



$x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cosh t, \sinh t)$



さて、話は変わって、

本講義後半の主題は、

積分

である

さて、話は変わって、

本講義後半の主題は、

積分

である

高校で習った積分

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** F **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての「定積分」** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

- **定積分は実は「面積」を表す**

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- **「積分」: 面積を求める手法の探求**
  (エジプト・ギリシャ: 2000 年以上前)
- **「微分」: 物体の運動の数学的探求**
  (Newton, Leibniz: 17 世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた!!
$\cdots$ 「微分積分学の基本定理」

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
　　積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- 「積分」: 面積を求める手法の探求
  (エジプト・ギリシャ: 2000 年以上前)
- 「微分」: 物体の運動の数学的探求
  (Newton, Leibniz: 17 世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
　　実は密接に関連していた!!
　　$\cdots$ 「微分積分学の基本定理」

積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、
  積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ ：「定積分関数」

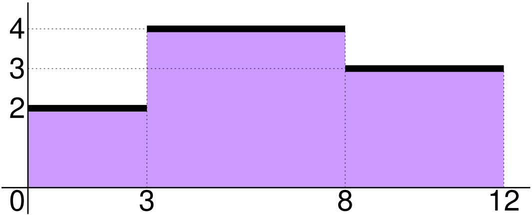
- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

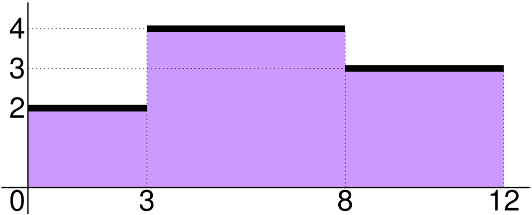
「微分積分学の基本定理」

積分の定式化

$$I = \int_0^{12} f(x)dx, \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 3) \\ 4 & (3 \leq x < 8) \\ 3 & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$



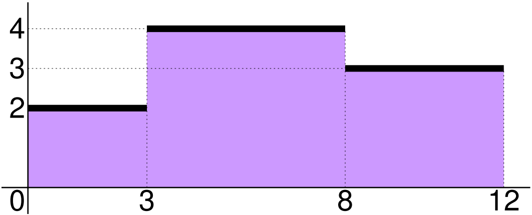
積分の定式化



$$I = \int_0^{12} f(x)dx$$
$$= 2 \times (3-0) + 4 \times (8-3) + 3 \times (12-8).$$

「積分」は「積和」である

積分の定式化



$$I = \int_0^{12} f(x)dx$$
$$= 2 \times (3-0) + 4 \times (8-3) + 3 \times (12-8).$$

「積分」は「積和」である

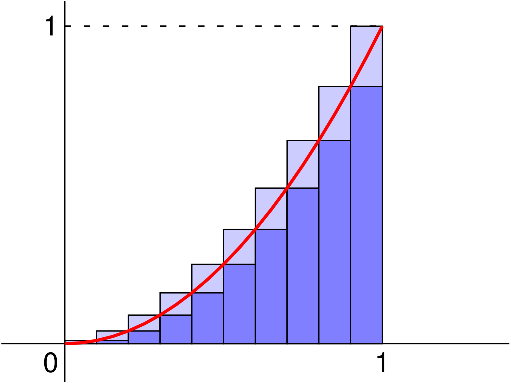
積分の定式化

では、

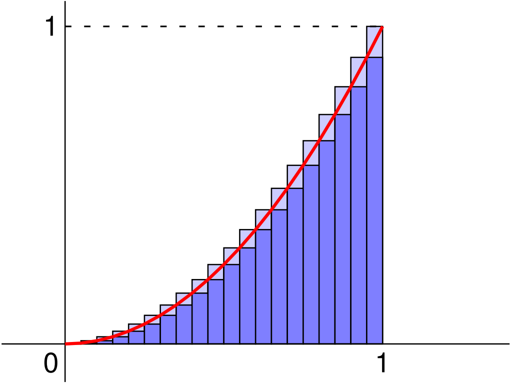
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

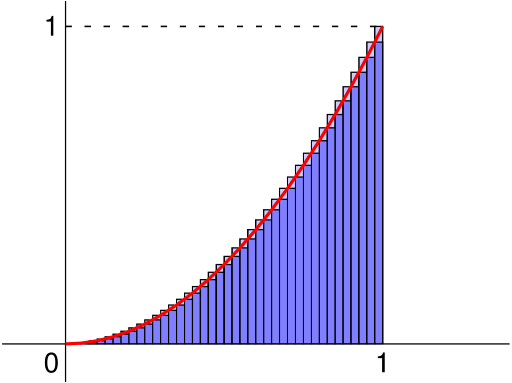
$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)dx, \qquad f(x) = x^2$$



演習問題

$f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

を計算したい。

分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ を n 等分な分割 (即ち $x_i = \dfrac{ia}{n}$) とする。

(1) 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での $f(x)$ の下限 m_i および上限 M_i は?

(2) $s_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ **及び**

$S_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ **を計算せよ。**

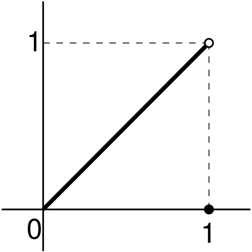
(3) **任意の** n **に対して** $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ **であることから、** $I = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$ **を求めよ。**
($\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$ **が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)**

上限・下限について (補足)

例: $I = [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

関数 $f(x)$ **(**$x \in I$**) に**
最大値はないが、
どう見ても 1 **が**
"最大値みたいな値"
である



上限・下限について (補足)

1 は最小の上界:

- 1 が上界である: $\forall x \in I : f(x) \le 1$
- 1 より少しでも小さくしたら上界でない:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : f(x) > 1 - \varepsilon$$

どんな (小さな) 正の数 ε についても
或る (うまい／まずい) $x \in I$ があって
$f(x)$ が $1 - \varepsilon$ を超える

このことを、
1 が f の I における上限である
と言い、$\sup_{x \in I} f(x) = 1$ と書く