

## 授業アンケート実施「教員独自の設問」

- (1) 入学前、数学は好きでしたか  
(好き ← 中間 → 嫌い)
- (2) 今は数学は好きですか  
(好き ← 中間 → 嫌い)
- (3) 理工学部共通の  
1年配当の必修科目として  
適切な内容だったと思いますか  
(難し過ぎ ← 適切 → 易し過ぎ)

## 期末試験のお知らせ

7月27日(月) 13:30 ~ 15:00

3-248教室 (ここじゃない)

- (中間試験の復習)
- 積分を巡る諸々  
(最終回(7/20)の講義内容まで)
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

## 補講 (質問会) のお知らせ

7月18日(土) 13:30 ~ 15:00

3-371 教室 (ここじゃない)

- 自習・勉強会・質問会
- 講義内容は進まない
- 試験範囲は広げない
- 出席は義務としない
- 質問がなければ途中で帰る

本講義後半の主題は、

# 積分

である

## 積分の定義

仮定:

- 積分区間  $I = [a, b]$  : 有界閉区間
- 被積分関数  $f : I$  で 有界  
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$   
: 区間の分割

$\delta(\Delta) = \max_i (x_i - x_{i-1})$  : 分割の最大幅

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$   
: 各区間での下限・上限

## 積分の定義

$$s_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S_{\Delta} = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

: 上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割  $\Delta$  を色々考えて、見積もりを精密にせよ



## 積分の定義

全ての分割  $\Delta$  を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に  $s \leq S$  であるが、 $s = S$  とは限らない!!

## 積分の定義

$s = S$  のとき、

これが“面積”と呼ぶべき唯一の値

この時、

$f$  は  $[a, b]$  で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_a^b f(x) dx$$

と書いて、

$f$  の  $[a, b]$  に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

例:

$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

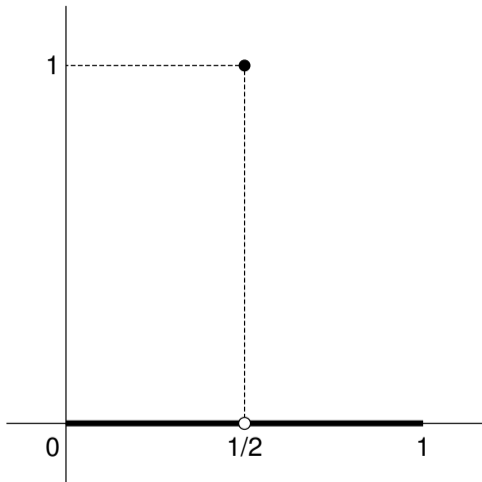
任意の分割  $\Delta$  に対し、 $s_{\Delta} = 0$

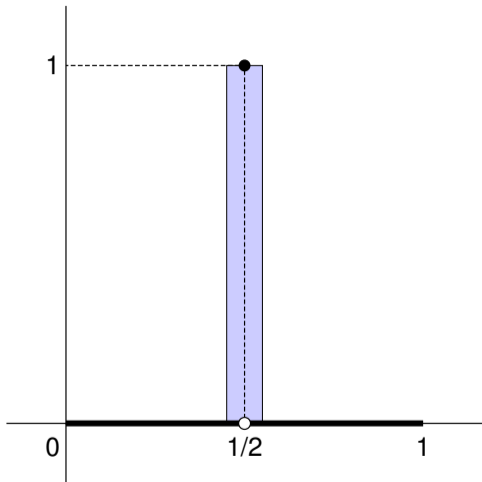
一方、

$\forall \varepsilon > 0$  に対し、 $S_{\Delta} \leq \varepsilon$  なる分割  $\Delta$  が存在

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$





### Darboux の定理:

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$  : 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$  となるような分割の列  $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$   
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

定理:

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続  
(このとき自動的に有界)



$f$  :  $I$  に於いて積分可能

更に、証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端  $x$  の関数で、**定積分関数**と呼ぶ)  
が  $f$  の**原始関数**になっていることが判る

## 微分積分学の基本定理

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続のとき

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  とおくと、

$F$  は  $f$  の原始関数 (の一つ)

- $F$  を  $f$  の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$



尚、下端  $a$  を取り替えても、  
定積分関数は定数の差しかない:

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない(下端を指定しない)とき、  
単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、

$f$  の不定積分 (**indefinite integral**) と呼ぶ

一方、原始関数も、

定数だけ違っててもやはり原始関数

(微分したら同じ)なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理

$f$  : 連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

→ 原始関数 (逆微分) を知れば

積分が計算できる

→ 計算は今までに馴染みの

諸公式・手法によれば良い

ところで、先日やった

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

だが、

$x = 1$  とすれば  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$  だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだ

しかし、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分 (**improper integral**)

- 区間が有界で、端点で関数が非有界

例:  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- 区間が非有界 (無限区間)

例:  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

→ 共に、収束・発散の判定が重要

## 区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

$f : [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  で定義され、  
 $x = b$  の近くで非有界だが、  
任意の (どんな小さい)  $\varepsilon > 0$  に対しても、  
 $[a, b - \varepsilon] = \{x \mid a \leq x \leq b - \varepsilon\}$  で  
有界かつ積分可能

とするとき、各  $\varepsilon > 0$  に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、

$f$  は  $[a, b)$  で **広義積分可能** と言い、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と書く (広義積分が収束する とも言う)

## 区間が非有界 (無限区間) な場合

$f : [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$  で定義され、  
任意の (どんな大きい)  $M > a$  に対しても、  
 $[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$  で  
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x) dx$$

が定義される



## 区間が非有界 (無限区間) な場合

この状況で、

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

が存在するとき、

$f$  は  $[a, +\infty)$  で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

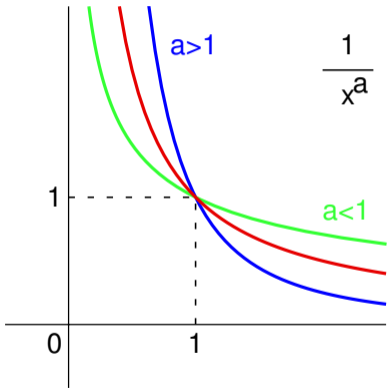
と書く (広義積分が収束するとも言う)

## 広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

## 広義積分の収束判定 (の例)



$$\frac{1}{x^a}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \implies$  収束

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \implies$  収束

## 広義積分の収束判定 (の例)

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}$$
$$\implies \int_1^{+\infty} f(x) dx : \text{収束}$$

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}$$
$$\implies \int_0^1 f(x) dx : \text{収束}$$

注意:  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  は収束するとは言わ**ない**

→  $[-1, 0)$  と  $(0, 1]$  とに分けて 別々に 考える:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x} = \log \varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \rightarrow +0)$$

なので、 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ,  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$  はどちらも収束しない

## 広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

:  $\Gamma$  関数 (ガンマ関数)

- 広義積分は  $s > 0$  で収束
- $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n + 1) = n!$

## 広義積分で定義される関数の例

$$B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

: B 関数 (ベータ関数)

- 広義積分は  $s > 0, t > 0$  で収束

- $$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$