

## 期末試験のお知らせ

7月27日(月) 13:30 ~ 15:00

3-248 教室 (ここじゃない)

- (中間試験の復習)
- 積分を巡る諸々  
(今日の講義内容まで)
- 学生証必携
- 「積分・Taylor 展開の公式集」  
は配布する

## 宣伝：秋期の数学関係の授業

- 理工共通科目Ⅱ群 (選択科目)
  - ★ 「ベクトル解析の基礎」
  - ★ 「微分方程式の基礎」
- 全学共通科目 (選択科目)
  - ★ 「現代数学 B」

## 理工共通科目 II 群の選択について

「お奨め履修モデル」を

理工学部ウェブサイトに掲載

<http://www.st.sophia.ac.jp>

→ 在学生へ → お奨め履修モデル

さて、前回の話。

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

だが、

$x = 1$  とすれば  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$  だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだ

しかし、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分 (**improper integral**)

- 区間が有界で、端点で関数が非有界

例:  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- 区間が非有界 (無限区間)

例:  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

→ 共に、収束・発散の判定が重要

## 区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

$f : [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  で定義され、  
 $x = b$  の近くで非有界だが、  
任意の (どんな小さい)  $\varepsilon > 0$  に対しても、  
 $[a, b - \varepsilon] = \{x \mid a \leq x \leq b - \varepsilon\}$  で  
有界かつ積分可能

とするとき、各  $\varepsilon > 0$  に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が定義される

## 区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、

$f$  は  $[a, b)$  で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と書く (広義積分が収束するとも言う)



## 区間が非有界 (無限区間) な場合

$f : [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$  で定義され、  
任意の (どんな大きい)  $M > a$  に対しても、  
 $[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$  で  
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x) dx$$

が定義される

## 区間が非有界 (無限区間) な場合

この状況で、

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

が存在するとき、

$f$  は  $[a, +\infty)$  で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

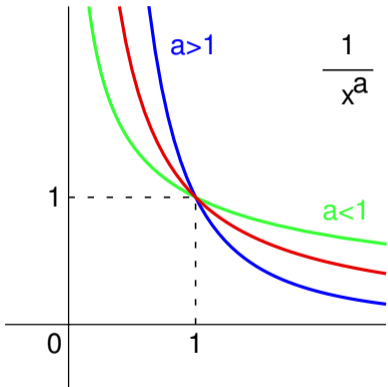
と書く (広義積分が収束するとも言う)

## 広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

## 広義積分の収束判定 (の例)



$$\frac{1}{x^a}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \implies$  収束

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \implies$  収束

## 広義積分の収束判定 (の例)

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}$$
$$\implies \int_1^{+\infty} f(x) dx : \text{収束}$$

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}$$
$$\implies \int_0^1 f(x) dx : \text{収束}$$

注意:  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  は収束するとは言わ**ない**

→  $[-1, 0)$  と  $(0, 1]$  とに分けて 別々に 考える:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x} = \log \varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \rightarrow +0)$$

なので、 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ,  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$  はどちらも収束しない

## 広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

:  $\Gamma$  関数 (ガンマ関数)

- 広義積分は  $s > 0$  で収束
- $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n + 1) = n!$

## 広義積分で定義される関数の例

$$B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

: B 関数 (ベータ関数)

- 広義積分は  $s > 0, t > 0$  で収束

- $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$



## 積分の計算法

微分積分学の基本定理:

$f$  : 連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば  
積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの  
諸公式・手法によれば良い

## 積分の計算法

しかし、(微分と違って)

良く知っている関数でも

不定積分(原始関数)が  
(原理的に)計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」  
の公式が存在しない!!

例: 不定積分  $\int \frac{e^x}{x} dx$  は、

- 有理関数・三角関数・指数関数  
および、それらの逆関数の
- 有限回の合成で作れる関数

(初等関数という) の範囲に収まらないことが  
証明されている

要は、

## 出来るものしか出来ない

ので、個別のテクニックを追っても切りがない。

そこで、個別の例は

公式集などを参照すれば良いことにして、

ここでは、

“原理的に計算できる例”

を幾つか紹介する

## “原理的に計算できる” 不定積分の例

- 有理関数
- $\sqrt[n]{1}$  次式 1 種類
- $\sqrt{2}$  次式 1 種類
- $\sqrt{1}$  次式 2 種類
- 三角関数の有理関数

## 有理関数の不定積分の基本形

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \log|x-a|$
- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$
- $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2+1)$
- $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$  は難しいが、出来る  
(部分積分して  $n$  についての漸化式を作る)

## 部分分数分解

多項式  $f(X), g(X)$  が互いに素 (共通因数なし)  
のとき

$$\frac{\text{多項式}}{f(X)g(X)} = \frac{\text{多項式}}{f(X)} + \frac{\text{多項式}}{g(X)}$$

の形に書ける

## 部分分数分解

実数係数多項式  $f(X) \in \mathbf{R}[X]$  は、

実数係数の範囲で、

$$f(X) = f_1(X)^{n_1} \cdots f_k(X)^{n_k}$$

(各  $f_i$  は 1 次式 または 実根なしの 2 次式)

と因数分解される

→ 有理関数の積分はさっきの基本形に帰着



## 演習問題 (提出不要)

### 有理関数

$$f(x) = \frac{7x^2 + 6x - 5}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)}$$

の不定積分を計算したい。

$$(1) f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+5}$$

を満たす定数  $a, b, c, d$  を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、

$$\int f(x)dx \text{ を求めよ。}$$

## $x$ と $\sqrt[n]{ax+b}$ との有理式

少々乱暴にも見えるが、

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

と置いてしまうのが簡明

→  $y$  の有理式の積分に帰着

## $x$ と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ との有理式

これも  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  と置いてみると、

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

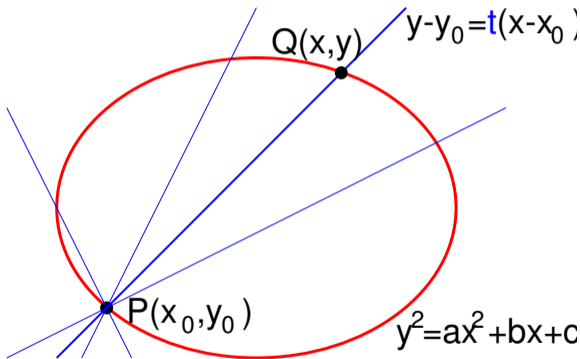
(楕円または双曲線の方程式)

→ 曲線上に 1 点を取ると、

有理媒介変数表示可能

→ 有理式の積分に帰着

$x$  と  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  との有理式



例:  $\int \sqrt{1+x^2} dx$

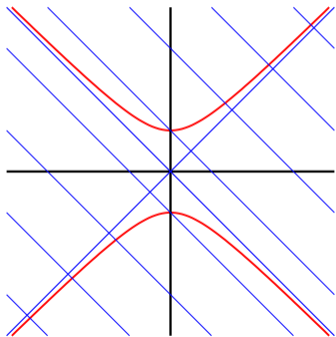
ものの本には「 $t = x + \sqrt{1+x^2}$ 」とあるが、

そういうのは覚えようとすると切りがないので、

単純に  $y = \sqrt{1+x^2}$  と置いて、

双曲線  $y^2 = 1+x^2$  の幾何を観察しよう

例:  $\int \sqrt{1+x^2} dx \longrightarrow y = \sqrt{1+x^2}$  と置く



双曲線

$$y^2 = 1 + x^2$$

の漸近線

$$x + y = 0$$

の“無限遠”に

“点  $P$ ” を取る

“点  $P$ ” を通る

直線は平行線

$$x + y = t$$

## 三角関数 $\sin \theta, \cos \theta$ の有理式

ものの本には「 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ 」とあるが、

これも幾何を見よう

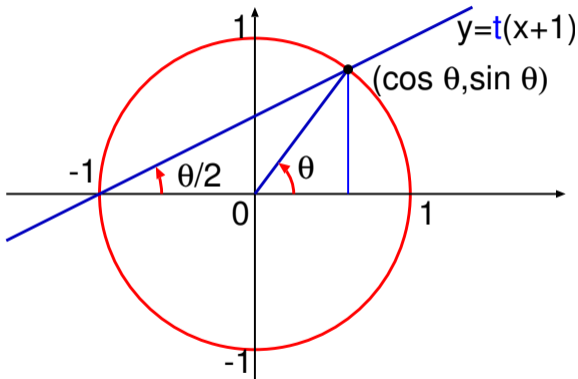
$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

と置けば、円  $x^2 + y^2 = 1$  上での積分

→ 円の有理媒介変数表示で

有理式の積分に帰着

## 三角関数 $\sin \theta, \cos \theta$ の有理式





実際の応用では、

明示的な表示もさることながら、

- 収束性の吟味
- 数値計算 (近似値計算・数値積分)
- 漸近的評価 ( $x \rightarrow +\infty$  での挙動)

なども重要である

## 終わりに

無闇に計算するだけが数学じゃない。

- 現象を観察すること
- 対象をどこまでも良く解ろうとすること
- それを紛れなく表現して伝えること

が大切なのだ。

おしまい