

計算機での情報の表し方

計算機内では

全てのデータは **0,1** の組 (列) で表される

情報の最小単位:

0 か 1 か : **bit** (**binary digit**)

実際には幾つかの **bit** を組にして一度に扱う

(通常は 8 **bit** = 1 **byte** (**octet**))

1 **byte** で $2^8 = 256$ 通りの値を表せる

計算機での数の表し方

計算機内の **0,1** の列を、
二進表記 (二進法) で数値として扱う

正の整数の場合、1 byte で

$$0 \leq x \leq 2^8 - 1 = 255$$

の範囲の値が表せる

十進 \longleftrightarrow 二進の変換

十進	二進
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
4	00000100
5	00000101
⋮	⋮
253	11111101
254	11111110
255	11111111

二進の九九 (一一?) の表

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

演習 (二進表記)

次の各式の被演算子 (operand) を
二進表記で表した上で、
それを用いて筆算で計算せよ。

(1) $87 + 26$

(2) $87 + 50$

(3) $87 - 26$

(4) 13×11

二進では桁数が多くて煩わしい

→ 十六進 (hexadecimal) 表記

十進	二進	十六進	十進	二進	十六進
0	0000	0	8	1000	8
1	0001	1	9	1001	9
2	0010	2	10	1010	a
3	0011	3	11	1011	b
4	0100	4	12	1100	c
5	0101	5	13	1101	d
6	0110	6	14	1110	e
7	0111	7	15	1111	f

十六進表記を示すのに、屡々0xを頭置する

十進	二進	十六進
0	00000000	0x00
1	00000001	0x01
2	00000010	0x02
3	00000011	0x03
4	00000100	0x04
5	00000101	0x05
⋮	⋮	⋮
253	11111101	0xfd
254	11111110	0xfe
255	11111111	0xff

計算機での数の表し方

計算機の内部では、

1 つの整数値を 8 bit で表している。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = 87$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = 26$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = 50$$

負の数 (符号付き整数) の表現

符号 — も 0,1 で表す

単純に考えると、

- 符号に 1 bit (正なら 0・負なら 1)
- 絶対値に残り 7 bit ($0 \leq |x| \leq 2^7 - 1$)

→ 欠点あり

- 0 が 2 通りに表される (+0, -0)
- 演算で正負の場合分けが面倒

→ 他にもっと良い方法はないか?

“ 2 の補数表示 ”

負の数 (符号付き整数) の表現

符号 — も 0,1 で表す

単純に考えると、

- 符号に 1 bit (正なら 0・負なら 1)
- 絶対値に残り 7 bit ($0 \leq |x| \leq 2^7 - 1$)

→ 欠点あり

- 0 が 2 通りに表される (+0, -0)
- 演算で正負の場合分けが面倒

→ 他にもっと良い方法はないか?

“ 2 の補数表示 ”

負の数 (符号付き整数) の表現

符号 — も 0,1 で表す

単純に考えると、

- 符号に 1 bit (正なら 0・負なら 1)
- 絶対値に残り 7 bit ($0 \leq |x| \leq 2^7 - 1$)

→ 欠点あり

- 0 が 2 通りに表される (+0, -0)
- 演算で正負の場合分けが面倒

→ 他にもっと良い方法はないか?

“ 2 の補数表示 ”

負の数 (符号付き整数) の表現

符号 — も 0,1 で表す

単純に考えると、

- 符号に 1 bit (正なら 0・負なら 1)
- 絶対値に残り 7 bit ($0 \leq |x| \leq 2^7 - 1$)

→ 欠点あり

- 0 が 2 通りに表される (+0, -0)
- 演算で正負の場合分けが面倒

→ 他にもっと良い方法はないか?

“ 2 の補数表示 ”

負の数 (符号付き整数) の表現

符号 — も 0,1 で表す

単純に考えると、

- 符号に 1 bit (正なら 0・負なら 1)
- 絶対値に残り 7 bit ($0 \leq |x| \leq 2^7 - 1$)

→ 欠点あり

- 0 が 2 通りに表される (+0, -0)
- 演算で正負の場合分けが面倒

→ 他にもっと良い方法はないか?

“ 2 の補数表示 ”

2 の補数表示

$$-128 = -2^7 \leq x \leq 2^7 - 1 = 127$$

の範囲の整数値が表せる

$$x' := \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 2^7 - 1) \\ x + 2^8 & (-2^7 \leq x \leq -1) \end{cases}$$

とおくと、

$$0 \leq x' \leq 2^8 - 1$$

→ x' を符号無し整数として表す

$$x \equiv x' \pmod{2^8}$$

2 の補数表示

$$-128 = -2^7 \leq x \leq 2^7 - 1 = 127$$

の範囲の整数値が表せる

$$x' := \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 2^7 - 1) \\ x + 2^8 & (-2^7 \leq x \leq -1) \end{cases}$$

とおくと、

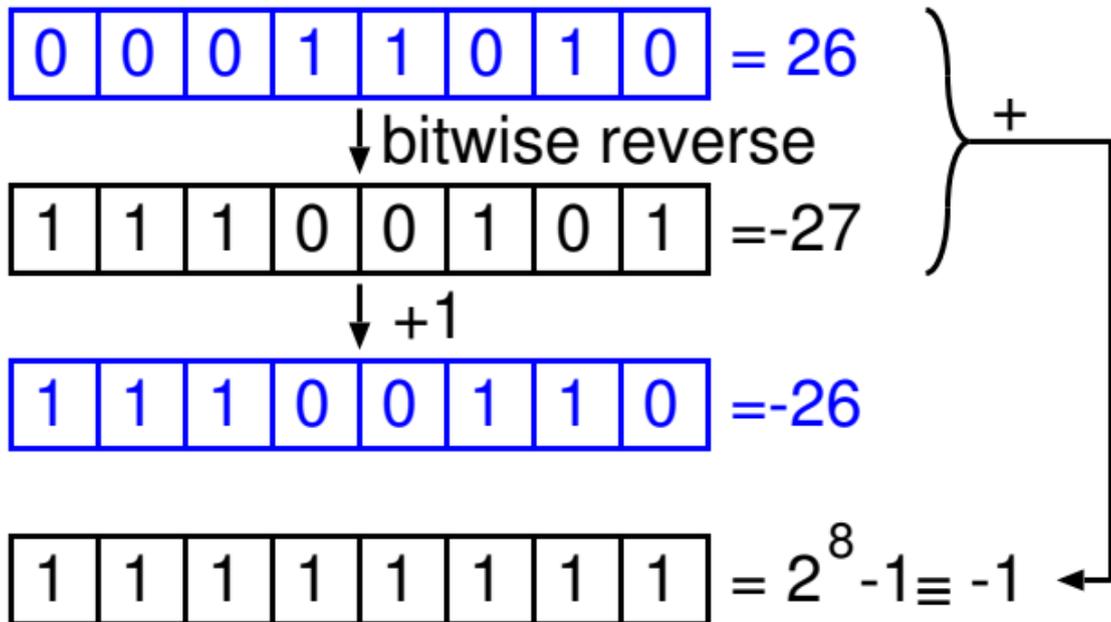
$$0 \leq x' \leq 2^8 - 1$$

→ x' を符号無し整数として表す

$$x \equiv x' \pmod{2^8}$$

2 の補数表示

x ($0 \leq x \leq 2^7 - 1$) から $-x$ を求めるには ...



符号付き整数の加算の桁溢れ判定

先程の演習の計算結果を、

2 の補数表示として読んでみよう

$-2^7 \leq x \leq 2^7 - 1$ の範囲の整数値が表せる

- $87 + 26$
 - 結果が上の範囲に収まる
 - 正しく読み取れる
- $87 + 50$
 - 結果が上の範囲に収まらない。
 - 正しく読み取れない・・・「桁溢れ」

符号付き整数の加算の桁溢れ判定

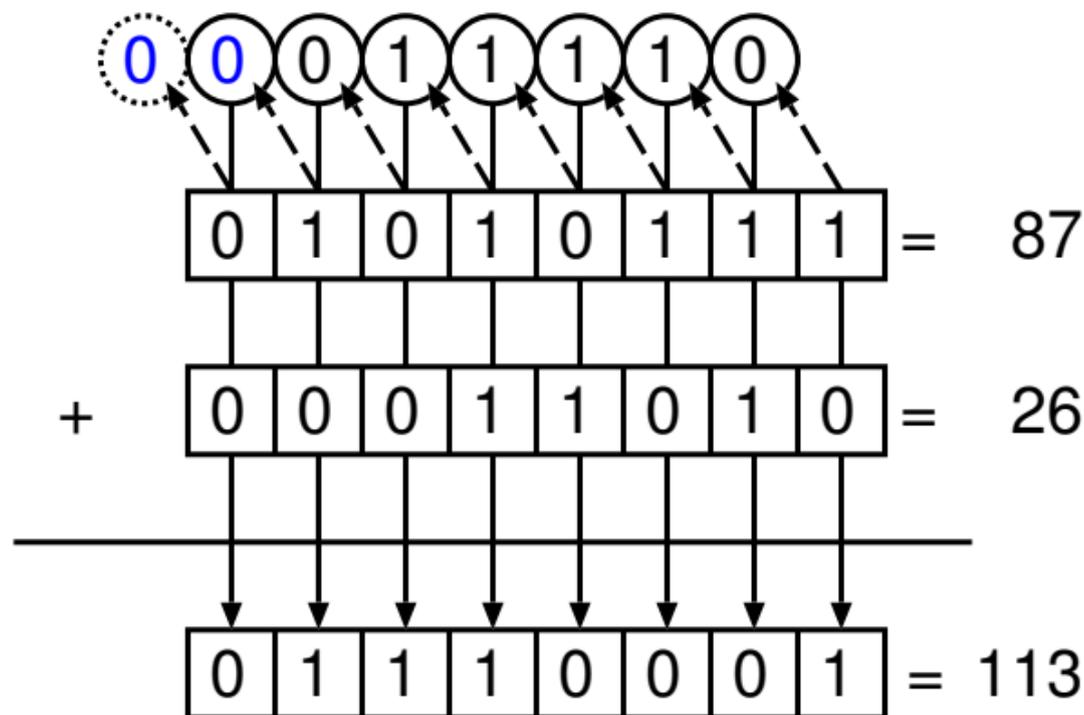
先程の演習の計算結果を、

2 の補数表示として読んでみよう

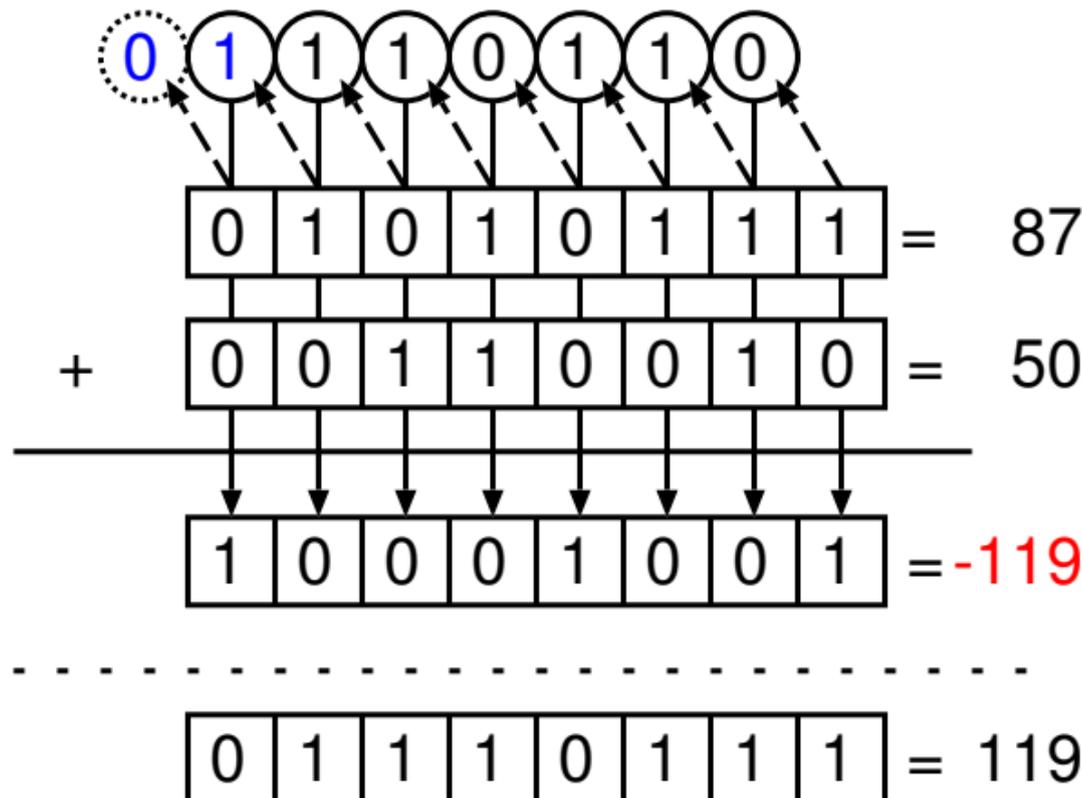
$-2^7 \leq x \leq 2^7 - 1$ の範囲の整数値が表せる

- $87 + 26$
 - 結果が上の範囲に収まる
 - 正しく読み取れる
- $87 + 50$
 - 結果が上の範囲に収まらない。
 - 正しく読み取れない・・・「**桁溢れ**」

符号付き整数の加算の桁溢れ判定



符号付き整数の加算の桁溢れ判定



符号付き整数の減算

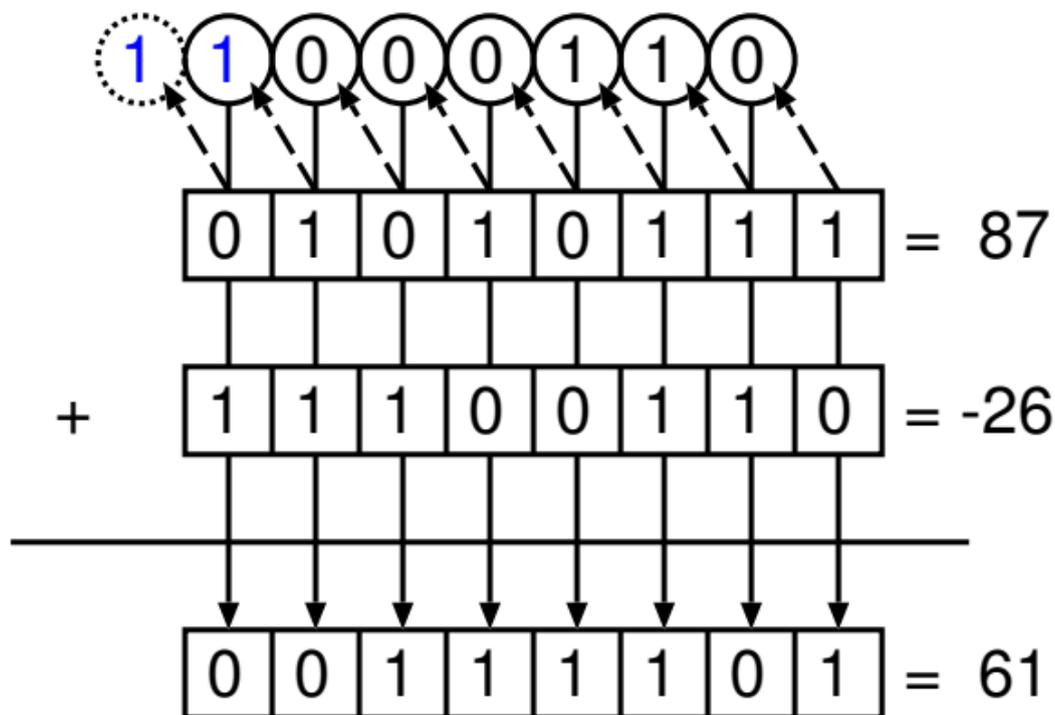
87 - 26

→ 減算を別の演算として扱うのは面倒

→ $87 + (-26)$ として計算してみよう

- (1) -26 を 2 の補数表示で表す
- (2) $87 + (-26)$ を二進表記の筆算で (普通に) 足す
- (3) 9 bit 目への繰上りは捨て、下 8 bit を取る

符号付き整数の減算



演習問題

(1) $\pm 87, \pm 50, \pm 26$ を、
8 bit の “2 の補数表示” で表せ。

(2) 上の表示を用いて、次を筆算で計算せよ。

- 9bit 目への繰上がりが発生するものは?
- 桁溢れが発生しているものは?

(1) $(+87) + (+26)$ (2) $(+87) + (-26)$

(3) $(-87) + (+26)$ (4) $(-87) + (-26)$

(5) $(+87) + (+50)$ (6) $(+87) + (-50)$

(7) $(-87) + (+50)$ (8) $(-87) + (-50)$

(3) 桁溢れの発生を判定するには?

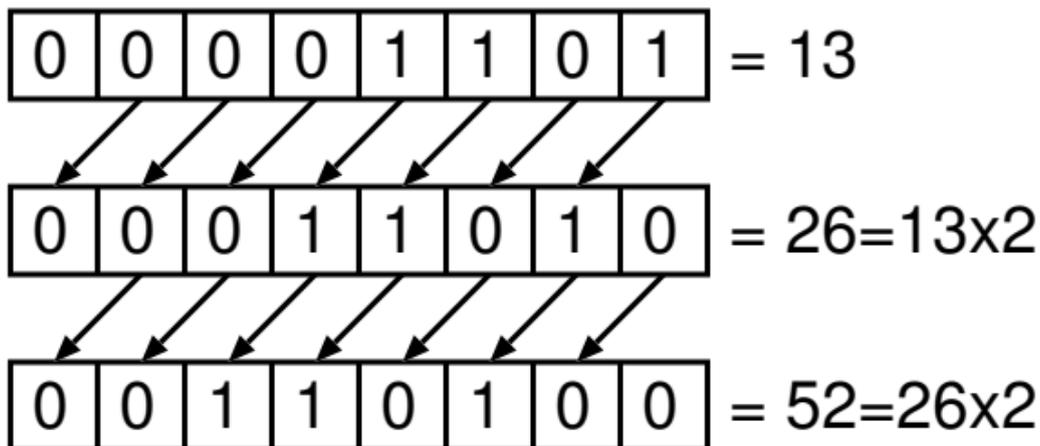
桁ずらし

$$13 \times 11$$

乗算は桁をずらして加える

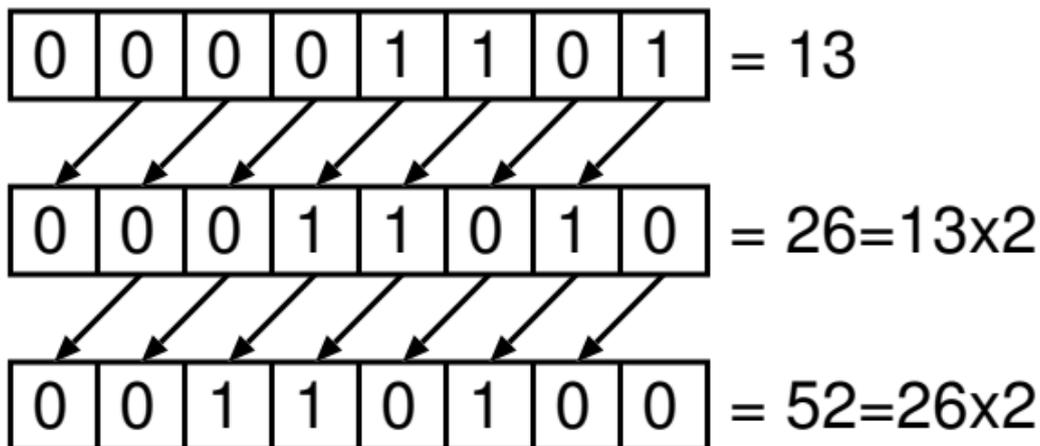
「桁ずらし (**bit shift**)」が基本的な操作

左シフト: $x \mapsto 2x$



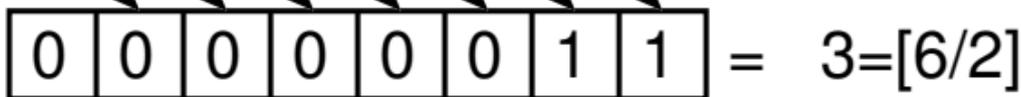
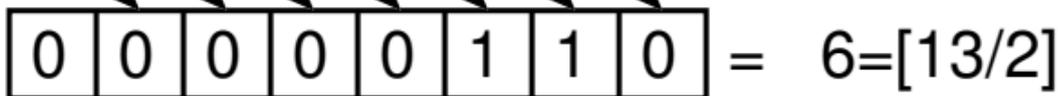
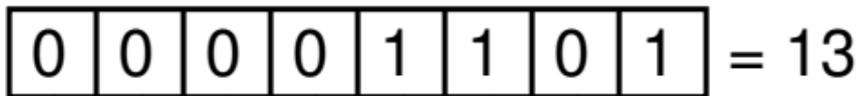
- 桁溢れの判定は？
- 負の数でも大丈夫か？

左シフト: $x \mapsto 2x$



- 桁溢れの判定は？
- 負の数でも大丈夫か？

右シフト: $x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$



- 桁溢れは起きない。
- 負の数でも大丈夫にするには？
(符号 bit の扱い)

以上のような、

- データ (bit 情報) の保持
- 基本的な演算

を計算機で実現するには？

→ 「論理回路」

以上のような、

- データ (bit 情報) の保持
- 基本的な演算

を計算機で実現するには？

→ 「論理回路」

論理回路

- **組合せ回路:**
入力 (の組) によって出力が決まる
→ 演算に用いる
- **順序回路:**
内部状態を保持し、
入力と入力前の状態とによって
出力と出力後の状態とが決まる
→ データ (bit 情報) の保持に用いる

論理回路

- **組合せ回路:**
入力 (の組) によって出力が決まる
→ **演算**に用いる
- **順序回路:**
内部状態を保持し、
入力と入力前の状態とによって
出力と出力後の状態とが決まる
→ **データ (bit 情報) の保持**に用いる