1. 級数の収束性

1–1. 数列・級数・関数の収束.

- 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が値 a に**収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0:\exists N:\forall n>N:|a-a_n|<\varepsilon$
- 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が値 a に**収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ 部分和の成す数列 $(\sum_{k=0}^{n}a_k)_{n=0}^{\infty}$ が a に収束
- 数列・級数が収束しない時は全て**発散**というが、特に、
  数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が**正の無限大に発散** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M:\exists N:\forall n>N:a_n>M$
- 関数 $f(x)$ が $x\to x_0$ で値 a に**収束**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$
- 関数 $f(x)$ が $x\to+\infty$ で値 a に**収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0:\exists M:\forall x>M:|f(x)-a|<\varepsilon$
- 関数 $f(x)$ が $x\to x_0$ で**正の無限大に発散**
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M:\exists\delta>0:\forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>M$

1–2. 絶対収束.

- (上に) 有界な単調増加数列はその上限に収束する。
  - ⋆ 数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が**上に有界** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M:\forall n:a_n<M$
  - ⋆ 上に有界な数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ の**上限** (最小上界) $\sup a_n:=\min\{M|\forall N:a_n<M\}$
    (即ち、$\forall N:a_n<M_0$ かつ $\forall\varepsilon>0:\exists N:a_n>M_0-\varepsilon$ となる M_0 のこと)
- 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ はその部分和が (上に) 有界ならその上限に収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限値は変わらない (同じ値に収束)。
- 絶対収束する級数は収束する。項の順番を入れ換えても、収束性や極限値は変わらない (同じ値に収束)。
  - ⋆ 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が**絶対収束** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ が収束
- 収束するが絶対収束しない級数 (条件収束) では、項の順番を入れ換えると、(正負の無限大を含めて) 任意の値に収束し得る。
- 交替級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ (n:偶数の時 $a_n>0$, n:奇数の時 $a_n<0$) は、$a_n\to0$ なら収束する (絶対収束するとは限らない)。

1–3. 級数の収束性判定. 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ について

- 既知の正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ と比較して
  - ⋆ 有限個の n を除いて $a_n\le b_n$ で $\sum b_n$: 収束 $\Rightarrow\sum a_n$: 収束
  - ⋆ 有限個の n を除いて $a_n\ge b_n$ で $\sum b_n$: 発散 $\Rightarrow\sum a_n$: 発散

  注: 上記の判定法で、
  - ⋆ 途中からでも良い ($\exists N:\forall n\ge N:a_n\le b_n$ などでも可)
  - ⋆ 定数倍しても良い ($\exists C>0:a_n\le Cb_n$ などでも可)
- d'Alembert の判定法 (比テスト)
  - ⋆ ($\exists r<1$: 有限個の n を除いて $a_{n+1}/a_n\le r$) $\Rightarrow\sum a_n$: 収束
  - ⋆ $a_{n+1}/a_n\to r(n\to\infty)$ のとき、
    $r<1\Rightarrow\sum a_n$: 収束,　　$r>1\Rightarrow\sum a_n$: 発散
- Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)
  - ⋆ ($\exists r<1$: 有限個の n を除いて $\sqrt[n]{a_n}\le r$) $\Rightarrow\sum a_n$: 収束
  - ⋆ $\sqrt[n]{a_n}\to r(n\to\infty)$ のとき、
    $r<1\Rightarrow\sum a_n$: 収束,　　$r>1\Rightarrow\sum a_n$: 発散
- 上記の判定法で $r=1$ の時はこれだけでは判らない。(より精密な判定法あり。)

1–4. 級数の収束・発散の例.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ は $|x|<1$ で絶対収束 $\left(=\dfrac{1}{1-x}\right)$、$|x|\ge1$ で発散
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は $s>1$ で (絶対) 収束、$s\le1$ で発散
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^s}$ は $s>1$ で (絶対) 収束、$s\le1$ で発散