5. 一変数関数の積分

5–1. **定積分の定義.** 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で有界であるとする。

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$: 区間 $[a, b]$ の**分割**
  小区間の最大幅 $\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
  : 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$
- $s := \sup_{\Delta} s_\Delta, S := \inf_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a, b]$ での**下積分・上積分**
- f が $[a, b]$ で**積分可能** $\overset{\leftharpoondown}{\Longleftrightarrow}$ $s = S$
  この時、$s = S =: \int_a^b f(x)dx$: f の $[a, b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$: 分割の列で、$|\Delta_n| \to 0$ とする。この時、
  $s_{\Delta_n} \to s, S_{\Delta_n} \to S$ $(n \to \infty)$。
- $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$: 各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$
  $I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$: **Riemann 和**
- f が $[a, b]$ で積分可能 $\Longleftrightarrow \exists \lim_{|\Delta| \to 0} I(\Delta, \Xi)$。この時、$\lim_{|\Delta| \to 0} I(\Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)dx$

5–2. **積分の基本性質.**

- 区間に関する加法性 : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- 線型性: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性 : $[a, b]$ で $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

5–3. **不定積分.** 定積分関数 $\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

5–4. **微分積分学の基本定理.** f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

即ち、**不定積分** = **原始関数** (微分すると f になる関数)。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅!!
又、F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く} \right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より

5–5. **広義積分 (変格積分).** 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。
下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f : 区間 $[a,b)$ (resp. $(a,b]$) の上端 b (resp. 下端 a) の近くで有界でない場合
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- f : 区間 $[a,+\infty)$ (resp. $(-\infty,b]$) で定義されている場合
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^b f(x)dx$$
- f : 区間 $[a,b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
→積分区間を $[a,c),(c,b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f : 積分区間の両端 a,b で広義積分の場合 (a,b の近くで有界でないか、$a,b=\pm\infty$)
→適当な点 c で積分区間を $(a,c],[c,b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例:
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha>1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\le 1\Rightarrow \text{発散},\end{cases} \qquad \int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha<1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\ge 1\Rightarrow \text{発散}\end{cases}$$
- 判定法 (簡単な場合)
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)(x\to+\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right)(x\to+0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

5–6. Γ **関数・**B **関数.**

- $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\frac{dx}{x}$: Γ **関数** (広義積分は $s>0$ で収束)
- $\mathrm{B}(s,t)=\displaystyle\int_0^1 x^s(1-x)^t\frac{dx}{x(1-x)}$: B **関数** (広義積分は $s>0,t>0$ で収束)
- $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s},\quad \mathrm{B}(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

5–7. **有理関数の積分.** 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し $c>0$)

- $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^n}dx : \begin{cases} n=1 \text{ なら } \log|x-a| \\ n\ge 2 \text{ なら } -\dfrac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\end{cases}$
- $\displaystyle\int\frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$: 変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b, \sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
$\to\begin{cases} n=1 \text{ なら } \arctan t \\ n\ge 2 \text{ なら部分積分で } n-1 \text{ の場合に帰着}\end{cases}$
- $\displaystyle\int\frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$: 変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int\frac{dt}{t^n}$ に帰着

5–8. **冪根 (平方根など) を含む積分.** 不定積分 (原始関数) が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
→ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+b}$ ($\sqrt{1\text{次式}}$ 2 種類) の有理式の積分
→ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
→ $y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
($\sqrt{3\text{次式又は}4\text{次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。)

5–9. **三角関数の有理関数の積分.** $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$