$\boxed{\mathbf{7}}$ $f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分 $I = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を計算したい。

分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ を n 等分な分割 (即ち $x_i = \dfrac{ia}{n}$) とする。

(1) 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での $f(x)$ の下限 m_i および上限 M_i は？

(2) $s_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ 及び $S_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ を計算せよ。

(3) 任意の n に対して $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ であることから、$I = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求めよ。

($\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$ が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。)