2010年度春期

# 数学B(微分積分)

## (物質生命理工学科１クラス)

↑ クラス分けに注意

(担当: 角皆)

# 理工学の大学初年級で学ぶ数学

| 数学の分野 (手法) | 解析学 (無限小解析) | 代数学 |
|---|---|---|
| 理工学の大学初年級では | 微分積分 | 線型代数 |
| 本学理工学部 1 年次では | 数学 B(微分積分)<br>微分方程式の基礎<br>ベクトル解析の基礎 | 数学 A (線型代数)<br>ベクトル解析の基礎 |
| 標語的には | 不等式の数学 | 等式の数学 |

# 本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校までは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

## 高校で扱った不等式

**例:** $2$ **次不等式**

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

**を解け。**

**解答:**

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$
$$(x-2)(x-5) < 0$$

**従って、**

$$2 < x < 5 \quad \square$$

**例:** $2$ **次方程式**

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

**を解け。**

**解答:**

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$

**従って、**

$$x = 2, 5 \quad \square$$

**「不等式」と言っても、**

**動作は等式の扱いと同様であった**

**では、ここで言う**

## 「不等式の数学」

**とはどういうものか？**

## 不等式の数学とは

**収束・発散・極限などなど、**

**それも**

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

**など**

# 不等式の数学とは

**と言っても難しいことではない**

**使うことはこの程度**

- **推移律：** $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
- **演算との関係：**
  - $\star$ $x \leq y \Longrightarrow x + a \leq y + a$
  - $\star$ $a > 0, x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay$
- **三角不等式：** $|x + y| \leq |x| + |y|$

**問 1:**

**縦が大体** 3cm**、横が大体** 5cm **の長方形の紙がある。**

**従って、面積は大体**

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

**である。さて、**

**面積の誤差が** $0.1\text{cm}^2$ **未満**

**であることを保証するためには、**

**縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか ?**

**真の縦の長さを** $x$ cm**、**

**真の横の長さを** $y$ cm **としよう。**

**この時、面積の誤差は** $|xy - 15|$ cm$^2$ **と表せる。**

$x = 3 + h,\ y = 5 + k$ **とおくと、**

$h, k$ **がそれぞれ縦横の誤差である。**

**誤差が** $\delta$ cm **未満とすると、**

$$0 \leq |h| < \delta, \qquad 0 \leq |k| < \delta.$$

**設定:**

$$\begin{cases} x = 3 + h, & 0 \leq |h| < \delta \\ y = 5 + k, & 0 \leq |k| < \delta \end{cases}$$

**目標:**

$$|h| < \delta, |k| < \delta \Longrightarrow |xy - 15| < 0.1$$

**となる $\delta$ を見付けること**

**目標**: $|h| < \delta, |k| < \delta \Longrightarrow |xy - 15| < 0.1$

**となる $\delta$ を見付けること**

- $\delta$ **は 1 つ見付ければ良い**

- **余り小さ過ぎない方が良い**
- **余りぎりぎりでなくても良い**

  $\longrightarrow$ **桁くらい判れば良いだろう**

- **論理的には厳密であること ($\fallingdotseq$ ではなくて)**

- **誤差の限界 (今は 0.1) が小さくなっても通用する方法が良い**

$$0 \le |h| < \delta, \qquad 0 \le |k| < \delta$$

---

$$\begin{aligned}
|(3+h)(5+k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\
&\le 5|h| + 3|k| + |h||k| \\
&< 5\delta + 3\delta + \delta^2 \\
&= 8\delta + \delta^2.
\end{aligned}$$

**従って、**

$$8\delta + \delta^2 \le 0.1$$

**となれば良い**

## 2 次不等式

$$8\delta + \delta^2 \le 0.1$$

**を解くのは大変だ**

**しかし、**

- **誤差の限界 $\delta$ が大きい時は興味がない**
- **ぎりぎりを狙う必要はない**

$\longrightarrow$ **例えば** $\delta < 1$ **という条件付きで考えれば良い**

**そこで、**

$$\delta \leq 1$$

**とする。すると、**

$$\begin{aligned} 8\delta + \delta^2 &\leq 8\delta + \delta \\ &= 9\delta \\ &< 10\delta \end{aligned}$$

**であるから、**

$$10\delta \leq 0.1$$

**となれば良い。**

**これより、**

$$\delta \leq \frac{1}{100} = 0.01$$

**となる。これと、さっき仮定した**

$$\delta \leq 1$$

**とを共に満たせば良いので、**

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

**に取れる。従って、縦横の長さの誤差は**
0.01cm **未満**
**であれば良い。**

**さっき $\delta \leq 1$ とした後に、**

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + 1$$

**とすることも出来た**
**(ここだけ見るなら論理的には正しい)**

**しかし、これだと**

$$8\delta + 1 \leq 0.1$$

**としなければならなくなってしまい困る**

$\longrightarrow$ **目標を見定めて議論を進める必要性**

**(技術的な細かい話)**

**もう少し厳しく、**

$$\delta \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

**としておけば、**

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \frac{1}{100}$$

**なので、**

$$8\delta + \frac{1}{100} \leq 0.1$$

**であれば良い**

**このような $\delta$ なら取ることが出来る**

**(技術的な細かい話)**

**しかし、この論法のためには、**
**$0.1$ だったらどれくらいにすれば良いか、**
**かなり注意深く取っておかないと破綻する**
**(本末転倒)**

**さっきのように、$\delta \leq 1$ の下で、**

$$\delta^2 \leq \delta$$

**で評価しておけば、**

**誤差の限界が小さくなっても、**
**後で $\delta$ を小さくとれば対応できる**

**(技術的な細かい話)**

**勿論、より精密な限界が知りたければ／必要ならば、**

- 2 **次不等式** $8\delta + \delta^2 \leq 1$ **を解くなり、**
- **もっと精密な評価をするなり、**

**すればよい／せねばならない**

**今までは、**

**誤差の限界が** $0.1\mathrm{cm}^2$ **に設定されていて、**

**その値以内に収めようとしてきたが、**

**この場合、原理的には、**

**どんなに厳しい (小さい) 限界に対しても、**

**同様の議論が可能**

$\longrightarrow$ **誤差の限界が** $0.001\mathrm{cm}^2$ **だったら？**

$\longrightarrow$ **より一般に、誤差の限界を** $\varepsilon$ $\mathrm{cm}^2$ **とすると？**

**問 $1^+$:**

**縦が大体 3cm、横が大体 5cm の長方形の紙がある。**

**従って、面積は大体**

$$3 \times 5 = 15\mathrm{cm}^2$$

**である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、**

**面積の誤差が $\varepsilon$ cm$^2$ 未満**

**であることを保証するためには、**

**縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？**

**任意の (どんなに小さい) 正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、**

$$|h| < \delta, |k| < \delta \Longrightarrow |(3+h)(5+k) - 15| < \varepsilon$$

**となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが可能であった**

**($\varepsilon$ が小さければ $\delta$ も小さくしなければいけないけれども)**

**これはどういうことかと言うと、**

**「$h, k$ が充分 $0$ に近ければ、**

**$(3+h)(5+k)$ は充分 $3 \cdot 5 = 15$ に近い」**

**ということを言っている**

**これが**

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} (3+h)(5+k) = 15$$

**或は**

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to 5}} xy = 15$$

**の実質的な意味内容なのであった !!**