# 中間試験のお知らせ

6月14日(月) 13:30 〜 15:00

3-421教室 (ここではない) の予定

- Taylor 展開を巡る諸々
  (前の週 (6/7) の講義内容まで)

- 学生証必携

詳細は追って

## 定理

- **単調増加数列が収束** $\Longleftrightarrow$ **上に有界**
- **正項級数が収束** $\Longleftrightarrow$ **部分和が有界**

**即ち、**$\forall n : a_n \geq 0$ **の時、**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \textbf{収束} \Longleftrightarrow \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$$

**しかも、**

- **極限値は部分和の最小上界 (上限)**
- **部分和は "飛び飛びの和" も考えても同じ**
- **順番を入替えても同じ値に収束**

## 極限値は部分和の最小上界 (上限)
## (least upper bound, supremum)

$$M_0 := \min\left\{ M \,\middle|\, \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M \right\}$$

$$= \sup\left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \,\middle|\, N = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = M_0.$$

## 比較判定法 (良く判っている級数と比較)

**正項級数** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **: 収束** $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **: 収束**
- $\sum a_n$ **: 発散** $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ **: 発散**

  - **途中からでも良い**
    **(**$\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可)**
  - **定数倍しても良い**
    **(**$\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ **でも可)**

**合わせて、**

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq C b_n$ **でも可**

# 比較判定法 (良く判っている級数と比較)

## 典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

## 比較判定法 (良く判っている級数と比較)

**典型的な「良く判っている級数」**

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**“隣との比”**$| < 1$ **くらいなら収束**

## 等比級数との比較

$a_n = r^n$ から "隣との比" $r$ を取り出すには？

- **漸化式:** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ 一般の数列 $(a_n)$ に対しても、
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 $r$ くらいなら
振舞は同様だろう

## 等比級数との比較

$a_n = r^n$ から "隣との比" $r$ を取り出すには？

- **漸化式:** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** $(a_n)$ **に対しても、**
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** $r$ **くらいなら**
**振舞は同様だろう**

# d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \text{収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ 収束
- $r > 1 \Longrightarrow$ 発散

## Cauchy の判定法 ($n$ 乗根テスト)

**正項級数** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \Longrightarrow \sum a_n : \textbf{収束}}$$

**特に、**

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\textbf{収束})$$

**のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

## 演習問題

**次の級数が絶対収束するような $x$ の範囲は？**

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

## 典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

**より一般に** $\forall a \in \mathbb{R}$ **に対し、**

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

**指数関数は多項式より遥かに強い !!**

## d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})\ \text{のとき、}$$

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

## Cauchy の判定法 ($n$ 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})\ \text{のとき、}$$

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

**で、$r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)**

**特に、単に**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \textbf{または} \quad \sqrt[n]{a_n} < 1$$

**であっても、収束するとは限らない !!**

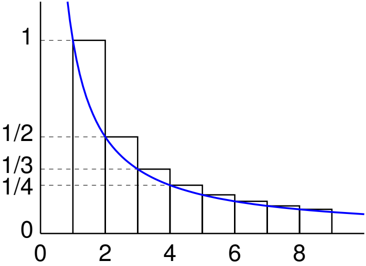
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \quad \textbf{または} \quad \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

**との違いに注意 !!**

# 例: 調和級数

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > \int_{1}^{N+1} \frac{dx}{x}$$

$$= \log(N+1) \to +\infty \quad (N \to \infty)$$



**実際、**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \textbf{発散} \qquad \textbf{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \textbf{収束}$$

**実は、**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow s > 1$ **で** $s$ **の関数を定めている**

**実際、**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \textbf{発散} \qquad \textbf{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \textbf{収束}$$

**実は、**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow s > 1$ **で** $s$ **の関数を定めている**

**実際、**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{：発散} \qquad \text{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{：収束}$$

**実は、**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $s > 1$ **で** $s$ **の関数を定めている**

## Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

**(この範囲で $s$ の関数を定めている)**

$\cdots$ **Riemann のゼータ関数**

**"Millenium Prize" の $7$ つの問題の $1$ つは、**

**この $\zeta(s)$ の性質に関すること**

**(Riemann 予想)**

$\longrightarrow$ **素数分布などと関連**

**(参考: 昨年 11 月放送の NHK スペシャル)**

# Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

**Euler (18 世紀) :**

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2m) = (\textbf{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

## Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

- $\zeta(3)$ ： 有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$ 達の中に無理数が無限個 (Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ の中の少なくとも 1 つは無理数 (Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の中の少なくとも 1 つは無理数 (Zudilin, 2003)

$\longrightarrow$ **これらの値 (特殊値) の数論的性質は現在でも大きな研究テーマ**

# 本題に戻ろう

## 冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$ **が収束する** $x$ **の範囲は？**

# 本題に戻ろう

## 冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$ **が収束する** $x$ **の範囲は？**

## 比テスト:

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s$$ （**収束**）**のとき、**

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

## $n$ 乗根テスト:

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s$$ （**収束**）**のとき、**

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

$s^{-1}$ : **収束半径**

## 収束半径

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
  $\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束

$$r := \sup\left\{ |x_0| \;\middle|\; \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: **収束半径 (radius of convergence)**

- $|x| < r \Longrightarrow$ 絶対収束
- $|x| > r \Longrightarrow$ 発散

- 全ての実数 $x$ に対し収束 $\cdots$ $r = \infty$
- $x = 0$ でしか収束しない $\cdots$ $r = 0$

## Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？**

$\longrightarrow$ **“Taylor の定理”**

## Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を行なってよいか？

$\longrightarrow$ “Taylor の定理”