

中間試験のお知らせ

6月14日(月) 13:30 ~ 15:00

3-421 教室 (ここでは**ない**) の予定

- Taylor 展開を巡る諸々
(前の週 (6/7) の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

今日は、

大学の数学の講義らしく

ちゃんと**定理の証明**をします。

本講義では、中間試験後にもう一回、
ちゃんと定理の証明をする回がある予定

Taylor 展開の問題点(考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
行なってよいか？

→ “Taylor の定理”

Taylor 展開の剰余項

“形式的” Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) = f(x)$$

であるか？

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$

\Updownarrow

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

: n 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



$$|R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

→ 剰余項 $R_N(f; x)$ の評価が問題

Taylor の定理

$f : \mathbb{N}$ 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

系

(1 つ取って固定した x に対して)

$$\exists C > 0 : \forall N : 0 < \forall \theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$$

$$\implies |R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

従って、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

注

$N = 1$ のときは、何を言っているのか？

$$0 < \exists \theta < 1 : R_1(f; x) = f'(\theta x)x$$

つまり

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x)$$

… (Lagrange の) 平均値の定理

Taylor の定理 … 平均値の定理の高次版

Taylor の定理の証明の方針

平均値の定理を 次々と繰り返し用いて
次数を上げていく

数学的帰納法 の形で証明を記述すると明快

“帰納法の仮定” を f' に適用
 $((f', N) \implies (f, N + 1))$ の流れ)

Taylor の定理の証明の方針

簡潔な証明のためには、

「平均値の定理」を少し一般化しておく必要有り
(Cauchy の平均値の定理)

ここでは、その元になる基本的な

「Rolle の定理」

から見ていこう

Rolle の定理

f : 閉区間 $[a, b]$ で連続

开区間 (a, b) で微分可能

$$f(a) = f(b)$$

$$\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Cauchy の平均値の定理

f, g : 共に 閉区間 $[a, b]$ で連続
開区間 (a, b) で微分可能

- $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$
- $g(a) \neq g(b)$

$$\implies \exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

注: $g(x) = x$ の時が **Lagrange** の平均値の定理

Taylor の定理

f : N 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

演習問題

$f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、

- (1) $|R_N(f; 1)| < 10^{-4}$ となる
(なるべく小さい) N を与えよ
- (2) e の近似値を小数第 3 位まで求めよ
- (3) 誤差が 10^{-3} 以下であることを保証せよ
(丸め誤差・打切誤差の双方を考慮に入れよ)