期末試験のお知らせ

7月26日 (月) 13:30 ～ 15:00

3-325 教室 (ここじゃない)

- (中間試験の復習)
- 積分を巡る諸々 (今日の講義内容まで)
- 学生証必携
- 「積分・Taylor 展開の公式集」は配布する

宣伝: 秋期の数学関係の授業

- **理工共通科目 II 群 (選択科目)**
  - ⋆ **「ベクトル解析の基礎」**
  - ⋆ **「微分方程式の基礎」**
- **全学共通科目 (選択科目)**
  - ⋆ **「現代数学 B」**

理工共通科目 II 群の選択について

「お奨め履修モデル」を

理工学部ウェブサイトに掲載

`http://www.st.sophia.ac.jp`

$\longrightarrow$ **在学生へ** $\longrightarrow$ **お奨め履修モデル**

さて、前回の話。

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

だが、

$x = 1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだ

しかし、区間端点 1 では被積分関数が定義されない

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

広義積分・変格積分 (improper integral)

- **区間が有界で、端点で関数が非有界**
  例: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- **区間が非有界 (無限区間)**
  例: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$\longrightarrow$ **共に、収束・発散の判定が重要**

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

f : $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ で定義され、
$x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
$[a, b - \varepsilon] = \{x | a \leq x \leq b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, b)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

と書く (広義積分が収束する ともいう)

区間が非有界 (無限区間) な場合

f : $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の (どんなに大きい) $M > a$ に対しても、
$[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x)dx$$

が定義される

区間が非有界 (無限区間) な場合

この状況で、

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, +\infty)$ **で****広義積分可能****と言い、**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

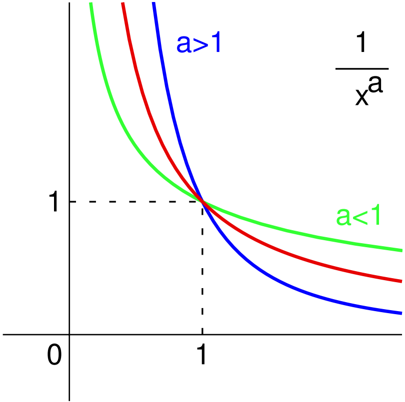
と書く (広義積分が収束する とも言う)

広義積分の収束判定 (の例)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ \alpha \geq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定 (の例)



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow$$ **収束**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\alpha < 1 \Longrightarrow$$ **収束**

広義積分の収束判定 (の例)

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1+\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$$ ： **収束**

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1-\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_0^{1} f(x)dx$$ ： **収束**

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$: **Γ 関数**

(ガンマ関数)

- **広義積分は** $s > 0$ **で収束**
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

広義積分で定義される関数の例

$$B(s,t) = \int_0^1 x^s(1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$$

: B 関数 (ベータ関数)

- 広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束

- $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

積分の計算法

> **微分積分学の基本定理:**
> f **: 連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

積分の計算法

しかし、(微分と違って)

良く知っている関数でも

不定積分 (原始関数) が
(原理的に) 計算できないものもある

「積の積分」「合成関数の積分」
の公式が存在しない!!

例: 不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx$ は、

- **有理関数・三角関数・指数関数 および、それらの逆関数の**
- **有限回の合成で作れる関数**

(初等関数という) の範囲に収まらないことが 証明されている

要は、

出来るものしか出来ない

ので、個別のテクニックを追っても切りがない。

そこで、個別の例は
公式集などを参照すれば良いことにして、

ここでは、
“原理的に計算できる例”
を幾つか紹介する

“原理的に計算できる” 不定積分の例

- **有理関数**
- $\sqrt[n]{1\text{ 次式}}$ 1 **種類**
- $\sqrt{2\text{ 次式}}$ 1 **種類**
- $\sqrt{1\text{ 次式}}$ 2 **種類**
- **三角関数の有理関数**

有理関数の不定積分の基本形

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}dx = \log|x-a|$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$
- $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ **は難しいが、出来る**
  (部分積分して n についての漸化式を作る)

部分分数分解

多項式 $f(X), g(X)$ **が互いに素 (共通因数なし) のとき**

$$\frac{\text{多項式}}{f(X)g(X)} = \frac{\text{多項式}}{f(X)} + \frac{\text{多項式}}{g(X)}$$

の形に書ける

部分分数分解

実数係数多項式 $f(X) \in R[X]$ は、

実数係数の範囲で、

$$f(X) = f_1(X)^{n_1} \cdot \cdots \cdot f_k(X)^{n_k}$$

(各 f_i は $\underline{1\ 次式}$ または $\underline{実根なしの\ 2\ 次式}$)

と因数分解される

$\longrightarrow$ 有理関数の積分はさっきの基本形に帰着

演習問題 (提出不要)

有理関数

$$f(x) = \frac{7x^2 + 6x - 5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

の不定積分を計算したい。

(1) $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2+2x+5}$

を満たす定数 a, b, c, d **を求めよ。**

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、

$\displaystyle\int f(x)\,dx$ **を求めよ。**

x と $\sqrt[n]{ax+b}$ との有理式

少々乱暴にも見えるが、

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

と置いてしまうのが簡明

$\longrightarrow y$ **の有理式の積分に帰着**

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ との有理式

これも $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ **と置いてみると、**

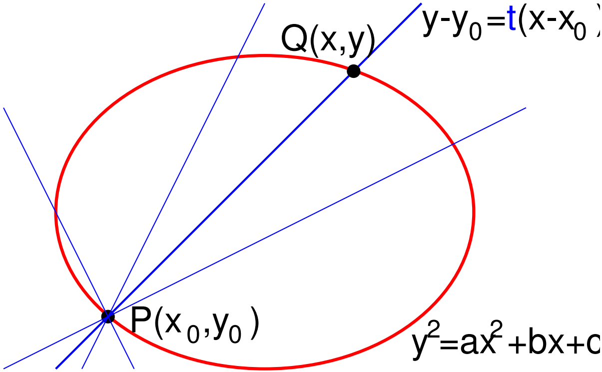
$$y^2 = ax^2+bx+c$$

(楕円または双曲線の方程式)

$\longrightarrow$ **曲線上に 1 点を取ると、有理媒介変数表示可能**

$\longrightarrow$ **有理式の積分に帰着**

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ との有理式



例: $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx$

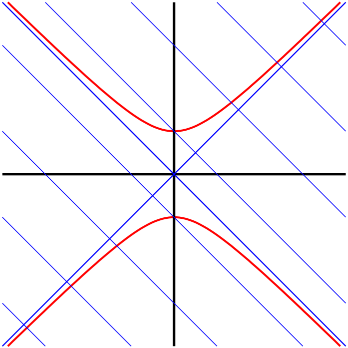
ものの本には「$t = x + \sqrt{1+x^2}$**」とあるが、**

そういうのは覚えようとすると切りがないので、

単純に $y = \sqrt{1+x^2}$ **と置いて、**

双曲線 $y^2 = 1 + x^2$ **の幾何を観察しよう**

例: $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \longrightarrow y = \sqrt{1+x^2}$ **と置く**



双曲線

$$y^2 = 1 + x^2$$

の漸近線

$$x + y = 0$$

の "無限遠" に

"点 P" を取る

"点 P" を通る

直線は平行線

$$x + y = t$$

三角関数 $\sin\theta, \cos\theta$ の有理式

ものの本には「$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$」とあるが、

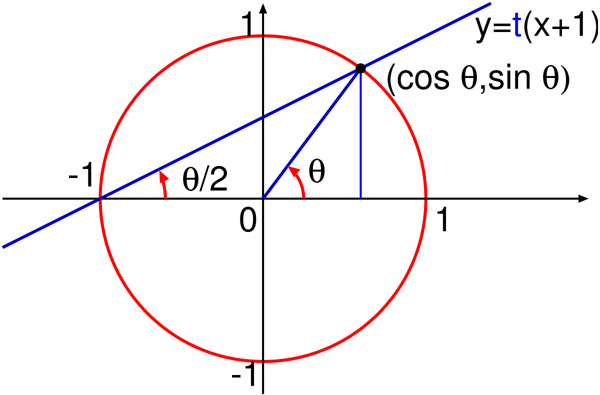
これも幾何を見よう

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

と置けば、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上での積分

$\longrightarrow$ 円の有理媒介変数表示で有理式の積分に帰着

三角関数 $\sin\theta, \cos\theta$ の有理式



実際の応用では、

明示的な表示もさることながら、

- **収束性の吟味**
- **数値計算 (近似値計算・数値積分)**
- **漸近的評価 ($x \to +\infty$ での挙動)**

なども重要である

終わりに

無闇に計算するだけが数学じゃない。

- 現象を観察すること
- 対象をどこまでも良く解ろうとすること
- それを紛れなく表現して伝えること

が大切なのだ。

おしまい