

休講分の課題レポート問題 (10/5 配布)

10/12(火)・26(火)の本授業は、担当者の出張のため休講とする。当該週の講義に代わる課題として、下記の問題に解答して提出すること。尚、更に補講を行なうかどうかは調整中であるので、決まり次第、授業時に連絡する。

- 提出: 10/19(火)または11/2(火)授業時
- 形式: 表紙に科目名(数学特論3)・学籍番号・氏名を明記すること

問1. $f(X) = X^3 + pX + q$ の3根を x_1, x_2, x_3 とする。

(1) x_1, x_2, x_3 の基本対称式 (elementary symmetric polynomial)

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ s_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$$

を p, q で表せ。

(2) 根の差積の平方

$$D(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

を f の判別式 (discriminant) という。 $D(f)$ を p, q で表せ。

[ヒント: $D(f)$ を展開して、最高次の項を消すように s_1, s_2, s_3 の冪積を作って引き、残った項についてこれを繰返す。Maple, Mathematica, Risa/Asir などの計算機代数(数式処理)ソフトウェアを用いても良い。]

問2. 3次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

- (1) 因数分解を見付けて解け。
- (2) Fontana-Cardano の方法で解いてみよ。

問3. “二重根号をはずす公式” $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ を確かめよ。

問4. $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ について、

- (1) 二重根号をはずせ。
- (2) x が満たす有理数係数の方程式(のうち次数最小のもの)を求めよ。
- (3) その方程式を Ferrari の方法で解いてみよ。

問5. $x = \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}$ について、

- (1) 無理やり二重根号をはずそうとするとどうなるか。
- (2) x が満たす有理数係数の方程式(のうち次数最小のもの)を求めよ。
- (3) その方程式を Ferrari の方法で解いてみよ。

問6. 3次対称群 \mathfrak{S}_3 について、

- (1) 全ての元を列挙し、それぞれの位数を答えよ。
- (2) 全ての部分群を列挙し、それらの包含関係を図示せよ。

問7. 4次二面体群 $D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle$ について、

- (1) 全ての元を列挙し、それぞれの位数を答えよ。
- (2) 全ての部分群を列挙し、それらの包含関係を図示せよ。
- (3) D_4 は正方形の自己同型群であるので、正方形の4頂点の集合に自然に作用する。これから得られる4次対称群 \mathfrak{S}_4 への D_4 の埋込み(単射準同型) $D_4 \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$ を求めよ。