

2010 年度後期

# 数学特論 3

(教育学部数学科)

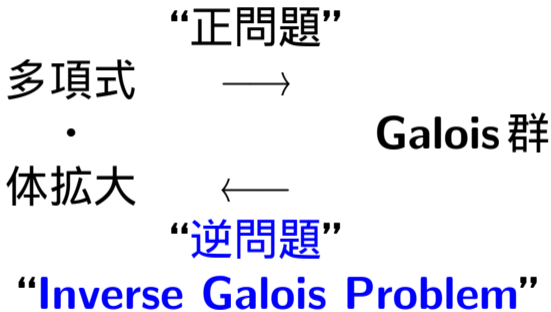
(担当: 角皆)

# Galois 理論

- 方程式の解け方の様子
- 体拡大の様子

を **Galois 群** によって計る

# Galois 理論



与えられた有限群  $G$  に対し、

- $G$  を **Galois** 群に持つ体拡大の存在 / 非存在
- 存在するならその具体的な構成  
(多項式の最小分解体として構成)  
→ **Galois** 群の構成問題
- パラメタ付の多項式による  $G$ -拡大の族の構成
- 全ての  $G$ -拡大を与える多項式の構成  
(**生成的多項式, generic polynomial**)

## 「構成的 Galois 理論」

一般的な理論に乗る部分もあるが、

実際には

扱う体や有限群の個性が強く影響し、

一筋縄でいかない所がある。

… 特に実例を多く扱うことで

## 「計算する数学」

の面白さを思い出してもらいたい。

(シラバスより)

## 本講義の概要・予定

- 古典的な方程式論  
(3次・4次方程式の根の公式)
- Galois 理論の復習
- Galois 群の計算例
- Galois の逆問題 (構成問題) について
- Galois 群の構成の幾つかの方法の紹介
  - ★ Hilbert の既約性定理とその応用
  - ★ Noether の問題とその応用
  - ★ Galois 剛性の利用

さて、初めに …

### 3 次方程式・4 次方程式の一般解法 (解の公式)

って知ってますか？

→ 方程式の解法探求の歴史

→ まず今までに習った数学 (算数) を振り返ろう  
(人間と数学の歴史を振り返る)

## 小学校:

- 自然数 (正の整数) の  $+$   $\times$
- $-$  は出来ない時がある
- $\div$  は商と余りとを求める (整除)
- 分数を用いた  $\div$  (正の有理数)
- 小数 (近似値  $\cdot$  正の実数)



## 中学・高校:

- 正負の数の四則 ( $+$   $-$   $\times$   $\div$ )
- 文字式 (多項式) の  $+$   $-$   $\times$
- $\div$  は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の  $-$   $\div$   $\longrightarrow$  1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

ところで …

大学で数学を習って

新しく出来るようになったことってある？

## 中学・高校:

- 正負の数の四則 ( $+$   $-$   $\times$   $\div$ )
- 文字式 (多項式) の  $+$   $-$   $\times$
- $\div$  は分数式 (有理式) として
- 1 変数の整除 (商と余り)
- 数の  $-$   $\div$   $\longrightarrow$  1 次方程式
- 2 次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3 次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算 (余りを求める)



**Gröbner 基底**

(広中-Buchberger の algorithm)

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を  
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式  $\longrightarrow$  1 変数方程式へ (変数消去)

本講義の中で行なう計算にも不可欠!!

ここでは、

## 3次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

## 2次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた  
(紀元前 2000 年頃!! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ (非整数も OK)
- (正数の範囲の) 引き算は OK
- 解も正の数のみ

## 2次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

→ 以下は別個に扱われた。 $(a > 0, b > 0)$

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった。

(→ 負の数は人間にとって考え難い?!)

### 3次方程式の解法 (根の公式) は？

「**根の公式**」とは:

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す。

参考:

- 作図問題: 定規とコンパス
- 中国: 解の近似計算 (小数)



2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、  
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された!!

16 世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期  
(但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見たいこう。

(以下、暫く板書で)

### 3 次方程式の根の公式 (Fontana-Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$  の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて  $-\frac{p}{3}$  となるように取る)

3乗根の1組を  $u, v$  とすると、( $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ )

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

## 判別式

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i) \text{ に対し、}$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &\quad : f \text{ の判別式 (discriminant)} \end{aligned}$$

- $x_1, x_2, x_3$  の対称式  
    → 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$  が重根を持つ  $\iff D(f) = 0$

## 判別式

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i)$$

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D(f) &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \\ &= s_1^2s_2^2 - 4s_1^3s_3 - 4s_2^3 + 18s_1s_2s_3 - 27s_3^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 \end{aligned}$$

## 判別式

判別式を用いると、  
**Fontana-Cardano** の公式は次の形:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega - \omega^2)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega^2 - \omega)}} \\ (D = -4p^3 - 27q^2)$$

(2 次方程式と同様に、根に  $\sqrt{D}$  が現れる!!)