3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

3 次方程式

$$f(X) = X^3 + pX + q = 0$$

の 3 根 x_1, x_2, x_3 に対し、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$
$$v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

を考えよ

(ω は 1 の原始 3 乗根、$\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3), v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

根の置換

$$\sigma = (1\ 2\ 3) : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$$

$$\tau = (2\ 3) : x_1 \mapsto x_1, x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_2$$

に対して、

$$\sigma : \begin{cases} u \mapsto \omega^2 u \mapsto \omega u \mapsto u \\ v \mapsto \omega v \mapsto \omega^2 v \mapsto v, \end{cases} \quad \tau : u \mapsto v \mapsto u$$

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

u^3 は、根のあらゆる置換で動かしても、出てくるのは u^3, v^3 のみ (軌道, orbit)

$$\Downarrow$$

$$(T - u^3)(T - v^3) = T^2 - (u^3 + v^3)T + u^3 v^3$$

の係数は、根のあらゆる置換で不変 (対称式)

$$\Downarrow$$

元の方程式の係数 (基本対称式) で書ける筈!!

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

u^3 は、根のあらゆる置換で動かしても、出てくるのは u^3, v^3 のみ (軌道, orbit)

$$\Downarrow$$

$$(T - u^3)(T - v^3) = T^2 - (u^3 + v^3)T + u^3v^3$$

の係数は、根のあらゆる置換で不変 (対称式)

$$\Downarrow$$

元の方程式の係数 (基本対称式) で書ける筈!!

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

u^3 は、根のあらゆる置換で動かしても、出てくるのは u^3, v^3 のみ (軌道, orbit)

$$\Downarrow$$

$$(T - u^3)(T - v^3) = T^2 - (u^3 + v^3)T + u^3v^3$$

の係数は、根のあらゆる置換で不変 (対称式)

$$\Downarrow$$

元の方程式の係数 (基本対称式) で書ける筈!!

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

ところで、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$
$$v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

は何処から来たのか ?

更に遡って、

2 次方程式の解法を Lagrange 風に見てみよう

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

ところで、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$
$$v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

は何処から来たのか ?

更に遡って、

2 次方程式の解法を Lagrange 風に見てみよう

2 次方程式の解法 (Lagrange 風)

$X^2 + aX + b = 0$ の 2 根を α, β とする:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases} \qquad \text{(基本対称式)}$$

これを直接解こうとしても、元の方程式に戻るだけ

$\alpha - \beta$ は対称式ではないが、

α, β を入換えると (-1) 倍

$\longrightarrow (\alpha - \beta)^2$ は対称式 $\longrightarrow a, b$ で表せる!!

2 次方程式の解法 (Lagrange 風)

$X^2 + aX + b = 0$ の 2 根を α, β とする:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases} \qquad \text{(基本対称式)}$$

これを直接解こうとしても、元の方程式に戻るだけ

$\alpha - \beta$ **は対称式ではないが、**

α, β **を入換えると** (-1) **倍**

$\longrightarrow (\alpha - \beta)^2$ **は対称式** $\longrightarrow a, b$ **で表せる!!**

2 次方程式の解法 (Lagrange 風)

$X^2 + aX + b = 0$ の 2 根を α, β とする:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases} \qquad \text{(基本対称式)}$$

これを直接解こうとしても、元の方程式に戻るだけ

$\alpha - \beta$ **は対称式ではないが、**

α, β **を入換えると** (-1) **倍**

$\longrightarrow (\alpha - \beta)^2$ **は対称式** $\longrightarrow a, b$ **で表せる!!**

2 次方程式の解法 (Lagrange 風)

$$
\begin{aligned}
(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
&= a^2 - 4b : \textbf{判別式}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\alpha + \beta = -a \\
\alpha - \beta = \pm\sqrt{a^2 - 4b}
\end{cases}
$$

$$
\longrightarrow \alpha, \beta = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}
$$

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

3 次方程式に戻って、

$$u = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3), v = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

は、

$\sigma = (1\ 2\ 3) : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$ **で** ω^2 **倍と** ω **倍**
$\longrightarrow$ **固有値** ω, ω^2 **の固有ベクトル**

始めから探すには、固有値問題を解けば良い
(対称群の線型表現)

3 次方程式の解法 (Fontana-Cardano の公式) への Lagrange の考察 (18 世紀後半)

うまくいった理由の要点:

u^3 **は、根のあらゆる置換で動かしても、**
出てくるのは u^3, v^3 **のみ (軌道, orbit)**

u^3, v^3 **が "程々に" 対称的**
$\longrightarrow$ **方程式を解く途中の手掛かりとなった**