4 次方程式の Ferrari の解法 (再掲)

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる

$$\Updownarrow$$

$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式 $\longrightarrow$ この t を用いて解く

分解式 (再掲)

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次**分解式** (**解核多項式**, **resolvent**)

$T := 2t$ とおいて、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

分解式 (再掲)

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$$
$$R(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

$R(T)$ **が因数分解できる**

$\iff f(X)$ **が** 3 **乗根を用いずに**

(平方根だけで) 解ける

このような、方程式の "解け方" を統制する群

$\cdots$ (方程式・多項式の) Galois 群

分解式 (再掲)

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$$
$$R(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

$R(T)$ **が因数分解できる**

$\iff f(X)$ **が** 3 **乗根を用いず**に

(平方根だけで) 解ける

このような、方程式の "解け方" を統制する群

$\cdots$ **(方程式・多項式の) Galois 群**

方程式論としての Galois 理論 (根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: **分離的 (重根を持たない) で monic な** n **次多項式**

$W := \{w \in \overline{K} \mid f(w) = 0\}$: f **の根全体**
$=: \{w_1, \ldots, w_n\}$

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - w_i)$$

f **の** K **上の Galois 群** $\mathrm{Gal}(f/K)$ **:**
“f **の根** w_i **達の満たす** K **係数の関係式を保つような根の置換” 全体の成す群**

方程式論としての Galois 理論 (根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \ldots, X_n]$ ： n **変数多項式環**

$$\varphi : R \longrightarrow \overline{K} : \textbf{環準同型}$$
$$X_i \longmapsto w_i$$

$I = I(f/K) := \mathrm{Ker}\varphi$

： "f の根 w_i 達の K 係数の関係式" の ideal

$\mathrm{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) \subset I\}$

： f の K 上の Galois 群