

4 次方程式の Ferrari の解法 (再掲)

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数 t を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは t の 3 次方程式 \longrightarrow この t を用いて解く

分解式 (再掲)

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 (解核多項式, **resolvent**)

$T := 2t$ とおいて、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

分解式 (再掲)

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$$

$$R(T) = T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

$R(T)$ が因数分解できる

$\iff f(X)$ が 3 乗根を用いずに
(平方根だけで) 解ける

このような、方程式の“解け方”を統制する群
… (方程式・多項式の) **Galois 群**

方程式論としての Galois 理論

(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: 分離的 (重根を持たない) で
monic な n 次多項式

$W := \{w \in \bar{K} \mid f(w) = 0\}$: f の根全体
 $=: \{w_1, \dots, w_n\}$

$$f(X) = \prod_{i=1}^n (X - w_i)$$

f の K 上の **Galois 群** $\text{Gal}(f/K)$:

“ f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を
保つような根の置換” 全体の成す群

方程式論としての Galois 理論

(根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \dots, X_n]$: n 変数多項式環

$\varphi : R \longrightarrow \bar{K}$: 環準同型

$X_i \longmapsto w_i$

$I = I(f/K) := \text{Ker}\varphi$

: “ f の根 w_i 達の K 係数の関係式” の ideal

$\text{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(I) \subset I\}$

: f の K 上の **Galois 群**