方程式論としての Galois 理論
(根の置換としての Galois 群)

$f(X) \in K[X]$: **分離的 (重根を持たない) で monic な n 次多項式**

$$W := \{w \in \overline{K} \mid f(w) = 0\} \text{ : } f \text{ の根全体} \\ =: \{w_1, \ldots, w_n\}$$

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - w_i)$$

f **の K 上の Galois 群** $\mathrm{Gal}(f/K)$:
"f の根 w_i 達の満たす K 係数の関係式を保つような根の置換" 全体の成す群

方程式論としての Galois 理論
(根の置換としての Galois 群)

$R := K[X_1, \ldots, X_n]$ ： n **変数多項式環**

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow \overline{K} : \textbf{環準同型} \\ X_i &\longmapsto w_i \end{aligned}$$

$I = I(f/K) := \mathrm{Ker}\varphi$

：“f の根 w_i 達の K 係数の関係式” の ideal

$\mathrm{Gal}(f/K) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(I) \subset I\}$

：f の K 上の Galois 群

例 (複二次式)

$f(X) = X^4 - 4aX^2 + 4b \in K := \mathbf{Q}(a, b)$

4 **根:** $w_1, w_2, w_3 = -w_1, w_4 = -w_2$

$X_1 + X_3, X_2 + X_4 \in I(f/K)$

$\mathrm{Gal}(f/K) \subset \langle \alpha, \beta \rangle \simeq D_4$ **(4 次の二面体群)**

ここに $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4), \beta = (2\ 4)$

a, b **の値によっては、**
$\mathrm{Gal}(f/K)$ **が** D_4 **より小さくなることもある**